4. FÉLÉVI VIZSGAKÉRDÉSEK
METEOROLÓGUS HALLGATÓK SZÁMÁRA

1. Fourier-sorok fogalma. (Trigonometrikus sor. Adott függvény Fourier sora, motiváció. Részletösszeg. A Fourier sor alapkérdései. Fourier-sorok komplex alakban.)

2. Riemann lemma. (Bizonyítása és következményei.)

3. Dirichlet-féle magfüggvény.(Definiciója, tulajdonságai. A Fourier sor részletösszegének felírása a Dirichlet-féle magfüggvény segítségével.)

4. Riemann-féle lokalizációs tétel és következményei. (A Fourirer sor és a Taylor sor kapcsolata, az $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ impropius integrál kiszámítása.)

5. A Fourirer sor pontonkénti konvergenciája.(S_0 definiciója, Dini tétele. Feltételek a Dini tételhez: egyoldali differenciálhatóság, lipschitzesség.)

6. Egyenletes konvergencia. (f differenciálhatósági tulajdonságai és a Fourier együtthatók kapcsolata. Fejér tétele. Weierstrass-féle approximációs tétel.)

7. Fourier-sorok tetszőleges intervallumokon. (Korlátos $[a, b]$ intervallumon értelmezett függvények Fourier sora, tiszra szinuszos illetve koszinuszos sorok. Nemkorlátos intervallumon értelmezett függvények Fourier sora. Fourier-féle transzformáció.és inverze.)

8. Többdimenziós Riemann-féle integrál fogalma téglatesten. ($\mathcal{J}_0$ fogalma és tulajdoságai, a μ_0 mértékfüggvény, diszjunktság. Kiterjesztés a $\mathcal{J}$ halmazra. Az $\mathcal{J}$ halmazrendszer tulajdonságai.

9. Többdimenziós Riemann-féle integrál $\mathcal{J}$ halmazrendszeren és tulajdonságai. (Alsó és felsõ integrál, integrálhatóság. A Riemann-féle közelítõ összeg. Az integrálható függvények tulajdonságai: mûveleti tulajdonságok, tartomány szerinti additivitás, nemnegativitás, monotonitás, abszolút érték integrálhatósága, szorzatra vonatkozó összefüggések.)

10. A Riemann-féle integrál általános korlátos tartományon és kiszámítása. (Kiterjesztés, definició. Integrál kiszámítása kétdimenziós téglalapon illetve görbevonalú trapézon..)

11. Jordan-mérhető halmazok. (Definició, a karakterisztikus függvény fogalma és kapcsolata a Jordán mérhetõséggel. A Jordan-féle nullmérétékû halmazok. A Jordan-féle nullmértékûség szükséges és elégséges feltétele. A Jordan-féle nullmérétékû halmazok tulajdonságai az únió illetve metszet képzésre, részhalmazokra. A Jordán mérhetõség szükséges és elégséges feltétele.)

12. Borel-féle befedési tétel.(Egydimenziós illetve $\mathbb{R}^N$-beli intervallumokra; általános eset.) Kompakt halmazok és kapcsolatuk a korlátos és zárt halmazokkal.

13. Cantor-féle számhalmaz. Tulajdonságai (topológiai, számosság, mérhetõség). A $\chi_C(x)$ függvény integrálhatósága.

14. A σ-gyûrû fogalma. Lebesgue-féle nullmértékű halmazok és tulajdonságaik.

15. A Riemann-féle integrálhatóság (a Jordan-nullbeliség, mint elégséges feltétel, bizonyítással, illetve a szükséges és elégséges feltétel).

16. A lépcsős függvények és tulajdonságaik. A Riemann-értelemben integrálható függvények kapcsolata a lépcsõs függvényekkel.

17. Az $L^+(a,b)$ tér és tulajdonságai. (Definició, összeg és skalárszoros térbelisége, tartomány szerinti additivitás, nemnegativitás, monotonitás.)

18. A Lebesgue-féle integrál fogalma. (Definició, a mérhetõ függvény fogalma, vektor tér, nemnegativitás, monotonitás.) A Lebesgue-féle mérhetõ halmazok. Tetszõleges Lebesgue-mérhetõ halmazon értelmezett függvények integrálja. Az $L_1(a,b)$ és az $L_2(a,b)$ terek.

19. Euklideszi terek. (Definició, példák.) Norma euklideszi terekben.

20. A normált terek és az euklideszi terek kapcsolata. Paralellogarmma szabály. Ortogonalítás.

21. Topoplógia euklideszi terekben, konvergencia-tipusok euklideszi terekben (erõs és gyenge konvergencia). Hilbert tér fogalma.

22. Ortogonális és ortonormált rendszerek. Általánosított Fourier-sor. Teljes ortonormált rendszerek.

Kiemelten kezelendő fogalmak

1. Fourier-sorok fogalma.

2. Riemann-féle lokalizációs tétel.

3. Többdimenziós Riemann-integrál.

4. Jordan-mérték.

5. Borel-féle befedési tétel.

6. Lebesgue-féle nullmértékű halmazok.

7. A Cantor-féle számhalmaz és tulajdonságai.

8. Lépcsõs függvény fogalma.

9. Lebesgue-féle integrál fogalma.

10. Euklideszi és Hilbert terek.

9. Ortonormált rendszerek.

10. Általánosított Fourier sorok. Teljes ortonormált rendszerek.

Budapest, 2005. május

Faragó István