6. Gram-Schmidt ortogonalizáció, *QR*-felbontás

Az egyszerű lineráris algebrai transzformációk között a harmadik fejezetben megismerkedtünk a vetítő mátrixokkal. E mátrixok alkalmasak arra, hogy a vektorok egy adott készletéből ortogonális vektorokat állítsunk elő. Ha ezen vektorokat egy mátrix oszlopaiba rendezzük, akkor a kapott módszer a mátrix egy újabb felbontását szolgáltatja, ezt hívjuk a -felbontásnak.

6.1. A Gram-Schmidt ortogonalizáció

Tegyük fel, van egy lineárisan független vektorokból álló halmaz: . Szeretnénk e vektorok felhasználásával olyan ortogonális rendszert készíteni, amellyel a halmaz vektorai előállíthatók. Ekkor eljárhatunk a következőképpen. A készülő ortogonális vektorokat jelöljük -val.

Az első lépésben válasszuk -et. A következő vektort készítsük úgy, hogy az vektort szimmetrikus - vagy más szóhasználattal - ortogonális vetítéssel ortogonalizáljuk -re:

. (6.1)

Beszorzással . A következő vektort úgy készítjük, hogy az vektort és -re ortogonalizáljuk:

. (6.2)

Ismét beszorzással ellenőrízve kapjuk, hogy és . A továbbiakban vezessük be az -edik ortogonális vektorhoz a

(6.3)

vetítőmátrixot. Látjuk, ha ezzel a mátrixszal bármely vektorra szorzunk, eredményül a vektorra ortogonális vektorhoz jutunk.

Az -edik ortogonális vektort a következő vetítések sorozatával kapjuk az vektorból:

. (6.4)

Vegyük észre, a vetítőmátrixok a szorzatban tetszőleges sorrendben írhatók a bennük szereplő vektorok ortogonalitása miatt. Fennáll az összefüggés:

, (6.5)

aminek az igazolását egy feladatra hagyjuk. Ez mutatja, hogy numerikusan kétféle lehetőség van az ortogonalizálásra. Az egyik, amikor a fenti összefüggésben a szummás alakot használjuk. Ekkor minden vektor az vektorral szorzódik és (6.4), (6.5) összevetéséből kapjuk:

, (6.6)

azaz minden vektor az ortogonális vektorok segítségével előállítható, ahol a kifejtési együtthatók

. (6.7)

Ha (6.4)-ben a mátrixszorzatot alkalmazzuk, akkor a következő vektor-sorozatot készítjük:

.

A vetítőmátrixok kiírásával ekkor az

(6.8)

előállításra jutunk.

A szummás alakot nevezzük a *klasszikus Gram-Schmidt (G-S) ortogonalizációnak,* a szorzatmátrixos változatot pedig *módosított Gram-Schmidt ortogonalizációnak.* Åke Björck a numerikus tulajdonságok vizsgálata során kimutatta, hogy a módosított G-S módszer jobb hibatulajdonságokkal rendelkezik. Újabb eredmények szerint mindkét módszer egyformán jó, ha minden ortogonalizációs lépést egymás után kétszer hatjunk végre. Ekkor a kapott normált vektorok ortogonalitása közel gépi pontossággal teljesül.

6.1.1 Feladatok

- Igazoljuk a (6.5) formulát!
- Mutassuk meg, hogy a (6.7) és (6.8) formulával adott megegyezik!
- Gyűjtsük az ortogonális vektorokat a mátrixba. Vezessük le, hogy
- Legyen , ahol oszlopai lineárisan függetlenek. Ellenőrízzük, hogy szintén vetítőmátrix és egy vektorra alkalmazva az eredmény olyan vektor lesz, amely összes oszlopára ortogonális.

6.2. Tétel, QR-felbontás

Legyen , ahol oszlopai lineárisan függetlenek. Ekkor mindig felírható

(6.9)

alakban, ahol oszlopai egymásra ortogonális vektorok és felső háromszög mátrix. és oszlopai az elsővel kezdve rekurzívan felépíthetők.

Bizonyítás. Szükséges , különben nem lehetnének oszlopai lineárisan függetlenek. Fogjuk fel az mátrixot úgy, mint ami az oszlopvektorokból van összeállítva és alkalmazzuk az előző szakaszban megismert G-S ortogonalizációt! Ekkor (6.6) és (6.7) öszevetéséből kapjuk:

.

Az mátrixokkal ez pedig nem más, mint a (6.9) előállítás, ahol . A G-S ortogonalizációban az elemek nem voltak definiálva. Nincs is rájuk szükség, így ezeket az elemeket zérusnak választva (6.9) pontosan teljesül. ■

4. Mit ad a (10.7) becslés arra az esetre, ha a sor szerinti főátló-dominancia csak úgy teljesül, hogy néhány sorban van egyenlőség? És ha csak az utolsó sorban van egyenlőség?

5.

6. A 10.3.1 Tétel segítségével bizonyítsuk be: , ha sorai szerint szigorúan főátló-domináns. Oszlopok szerinti főátló-dominancia esetén hogyan módosítsuk az állítást?
7. Feltéve, hogy főátlódomináns a sorai szerint, a 10.3.1 Tétel segítségével mutassuk meg: .
8. Ha , a 10.3.1 Tételhez hasonló egyenlőtlenséget származtathatunk (2.15) fellhasználásával, mivel . Mutassuk meg, hogy ekkor indukált normával érvényes: . Szükséges, hogy most diagonálmátrix legyen? Az 5. Példa mátrixára melyik módszer ad jobb becslést?

10.6. Egy lépésben optimális paraméter meghatározása

Láttuk, (10.11)-ben az vektorból kiindulva az

(10.12)

vektort készítjük, a Gauss-Seidel módszer vektora helyett. Vezessük be az , jelöléseket és határozzuk meg az paramétert általánosan az felbontás mellett! (10.12)-ból kapjuk:

. (10.13)

Határozzuk meg a -adik lépésben -t abból a feltételből, hogy minimális! Ehhez nem kell mást tenni, mint az „egyenletet" a pszeudoinverzzel -ra megoldani:

(10.14)

Hogy ne kelljen -et explict módon előállítani, a relaxáció nélküli alakból kifejezzük -t:

, (10.15)

innen

. (10.16)

Az meghatározásához vezessünk be egy újabb vektort:

(10.17)

és ekkor a következő iterációs algoritmust készíthetjük:

Két lehetőség is van számítására. Természetesen az első az olcsóbb. Az iteráció előrehaladtával lehet, hogy a második módszer eredménye jelentősen eltér az elsőétől. Célszerű ilyenkor értékét a második, pontosnak tekinthető módszerrel feljavítani. Az algoritmusban a vektorokat indexeltük, bár nem szükséges, mivel minden lépésben az előző vektor az újjal felülírható.

10.7. Feladatok

1. Bizonyítsuk be, szimmetrikus mátrixokra a Rayleigh-hányados legkisebb értéke a legkisebb sajátérték.
2. Hogy hajtsuk végre a Jacobi-iterációt, ha a mátrix az oszlopai szerint szigorúan főátló-domináns?
3. Mutassuk meg, a 10.3.1 tétel átfogalmazható arra az esetre, amikor a mátrix oszlopai szerint szigorúan főátló-domináns.

6.2.1 Feladatok

- A G-S ortogonalizációnál kidolgozható az a változat, amikor a vektorok normáltak, . Írjuk át a formulákat erre az esetre!
- Legyen , ezzel oszlopvektorai normáltak. (6.9)-ben legyen . Adjuk meg -et mátrixos alakban és a normált ortogonális vektorok segítségével fejezzük ki -t!
- A 3.12 gyakorlatban láttuk, hogy minden vektor egy vektorba vihető tükrözéssel, ahol . Ha egy ilyen tükrözést alkalmazunk első oszlopára, akkor a -felbontás az első oszlopra megvalósult: ortogonális mátrix, ahol és . Hogyan folytassuk a tükrözéseket, hogy egy -felbontáshoz jussunk?
- Ha rendelkezésünkre áll egy -felbontása, hogyan oldjunk meg egy egyenlet-rendszert?

6.3. Példa QR-felbontásra

Elkészítjük az

mátrixra a -felbontás nemnormált változatát. Induláskor és . A következő vektorhoz és

.

, ezt az eredményt előállíthatjuk a kapott vektorból, de úgy is számíthatjuk, hogy

észrevesszük: A harmadik vektor

előállításához és , ezekkel a harmadik vektor és a -felbontás:

,

.

6.3.1 Feladat

Készítsük el a következő mátrix -felbontását: .

6.4. Az Arnoldi-módszer

Ez a *Krilov-bázis* vektorainak G-S ortogonalizációja. A *Krilov-bázis* vektorai , ahol , egyébként tetszőleges induló vektor. Az Arnoldi-módszernél ennek alapján , a következő vektor és ezt -re -re ortogonalizálva kapjuk -t. Általában -et úgy kapjuk, hogy az vektort ortogonalizáljuk a meglévő vektorokra és az eredményt normáljuk. Belátható, hogy az így nyert vektorok ugyanazt az alteret feszítik ki, mint a Krilov-bázis vektorai. A módszerrel a következő -felbontáshoz jutunk:

, (6.10)

ahol felső háromszögmátrix. Ebből a sémából szokás elhagyni bal oldalon az első vektort, -et. Ez azt jelenti, hogy a jobb oldalon első oszlopát is elhagyjuk. Sőt, hogy helyén négyzetes mátrix maradjon, az utolsó sorát is elhagyjuk. Jelöljük a maradék mátrixot -val. Ekkor a vektorokból mátrixot képezve a

(6.11)

összefüggésre jutunk, ahol un. *felső Hessenberg-féle* mátrix. E mátrixok közeliek a felső háromszögmátrixokhoz, azzal a különbséggel, hogy a főátló alatti elemek sem zérusok. A rendszert jobbról az vektorral szorozva kapunk rekurziót számítására:

, (6.12)

a elemet abból a feltételből határozhatjuk meg, hogy normált. Ha , akkor a rekurzió megáll és esetén oszlopai egy invariáns alterét feszítik ki.

6.4.1 Feladat

1. Legyen az kezdővektor három sajátvektorának az összege. Hány lépés után áll le az Arnoldi-módszer?

7. Az algebrai sajátértékfeladat

Eszerint keresendő egy hármas, amelyre teljesül

, (7.1)

ahol az mátrix *sajátértéke*, a *jobboldali* és a *baloldali sajátvektor*. A sajátértékek a *karakterisztikus polinom* gyökei és a sajátértékhelyeken szinguláris. A determináns alakból látható, hogy a mátrix hasonlósági transzformáltjának karaketerisztikus polinomja ugyanaz:

10.4. Gauss-Seidel (GS-) relaxáció

Ekkor a gyorsabb konvergencia reményében szerepét megosztjuk között:

Összeadva, majd -re rendezve:

(10.9)

Innen az iterációs mátrix

(10.10)

Ha , akkor visszakapjuk a Gauss-Seidel iterációt. A komponensenkénti alakot (10.9) -edik sorából kapjuk:

(10.11)

Eszerint a Gauss-Seidel relaxáció következő lépésének eredményét megszorozzuk -val és ehhez hozzáadjuk a -adik vektor -szorosát.

10.5. A relaxációs módszerekre vonatkozó néhány tétel

1. Ha egyik diagonáleleme sem 0, egyébként tetszőleges, akkor , azaz csak akkor remélhető konvergencia, ha 0 és 2 közé esik.
2. Legyen szimmetrikus, pozitív definit mátrix és . Ekkor , vagyis minden ilyen -ra konvergens a GS-relaxáció.

A következő két tétel blokk-háromátlós mátrixokra vonatkozik. Természetesen 1 1-es blokkok esetén a megszokott mátrixot kapjuk vissza.

3. Legyen blokk-háromátlós mátrix. Akkor a megfelelő blokk Jacobi (J) és GS-iteráció mátrixaira

   .

   Ez azt jelenti, a kettő egyszerre konvergens, vagy divergens és konvergencia esetén a GS-iteráció kétszer gyorsabb.
4. Legyen blokk-háromátlós, szimmetrikus és pozitív definit. Ekkor a blokk-Jacobi iteráció, valamint a blokk-GS relaxáció mellett konvergens. Utóbbinál az optimális relaxációs paraméter

és erre az optimális paraméterre a spektrál sugár

Olyan a műveletek sorrendje, hogy értéke értékével felülírható. Így a tárigény: előnyösebb, mint a Jacobi-iterációnál. Célszerű kezdővektor: .

10.3.1 Tétel. Felhasításból származó iterációs mátrix normájának becslése

Legyenek -es valós mátrixok, diagonálmátrix: és -re. Ekkor fennáll:

ahol a maximum-keresésnél elegendő a nemzérus számlálókat tekinteni.

Bizonyítás. Mivel főátlódomináns, a kijelölt inverz létezik. A norma definiciója szerint . Legyen és tegyük fel, a maximum -edik indexénél valósul meg: . Átrendezéssel , ahonnan az -edik sorra . Figyelembe véve, hogy , innen átrendezéssel kapjuk az egyenlőtlenséget. Mivel nem tudjuk, melyik -re valósul meg , ezért a törtet a sorok szerint maximalizáljuk. Ha -edik sora zérus, akkor adódik, ami feltevésünkkel ellentmondó nemzérus mellett, így ezeket a sorokat elhagyhatjuk. ■

10.3.2 Tétel

Ha sor szerint szigorúan domináns átlójú, akkor

(10.7)

Bizonyítás. Az előző tételben legyen , és a mátrix főátlójából alkotott diagonálmátrix. Ezzel a választással közvetlenül adódik az első egyenlőtlenség.

A második egyenlőtlenség igazolásához vezessük be az

(10.8)

jelöléseket. Eszerint és igazolandó, hogy ez nem nagyobb, mint . Tegyük fel, . Ekkor -ből átrendezéssel , ahonnan következik. Ez éppen a szigorú főátló-dominancia feltétele, amit feltettünk. Egyenlőség csak akkor lehetséges, ha . Így

.

Ha balról az első maximumnál , akkor biztosan . ■

, tehát a hasonlósági transzformáció a sajátértékeket helyben hagyja.

A mátrixot általában valósnak tekintjük. De mivel valós mátrixnak is lehetnek komplex sajátértékei és sajátvektorai, emiatt sokszor a komplex esetre is gondolni kell.

7.1. Néhány tulajdonság

Az alábbiakban felidézünk néhány a sajátértékfeladattal kapcsolatos ismeretet.

7.1.1 Legalább 1 sajátpár létezése

Minden sajátértékhez tartozik legalább egy jobb- és baloldali sajátvektor.

Mert és magtere legalább 1-dimenziós (ui. nemcsak a null-vektorból áll). ■

7.1.2 Lineáris függetlenség

Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Ennek a bizonyítása indirekt módon történhet. Feltesszük két különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorról, hogy lineárisan összefüggők. Ekkor ellentmondásra jutunk, mert két vektor úgy lehet linerárisan összefüggő, hogy egyirányúak, ekkor viszont nem lehetnek a sajátértékek különbözők. ■

7.1.3 Különböző sajáértékhez tartozó bal és jobb sajátvektorok ortogonalitása

Legyen a sajátértékhez tartozó bal sajátvektor, pedig a sajátértékhez tartozó jobb sajátvektor, . Ekkor .

Bizonyítás. Tekintsük a következő kifejezést: , ahol az egyik esetben a bal, a másik esetben pedig a jobb sajátvektor tulajdonságot alkalmaztuk. Kapjuk, hogy , s ebből következik az állítás, mert . ■

7.1.4 Következmény

Ha minden sajátérték különböző, akkor a sajátvektorokat egy és mátrixba rendezve kapjuk:

. (7.2)

A lineáris függetlenség miatt és invertálhatók, így , ahol a transzponált inverzét jelöltük -vel. Írhatjuk: , ahol egy nemszinguláris diagonálmátrix és szerepe csupán annyi, hogy az vektorok hosszát skálázza. Tehát az általánosság megszorítása nélkül vehetjük: , a sajátvektorok saját-altereket adnak, a vektorok hossza tetszőleges. A kapott alak mutatja, hogy ekkor a mátrix *hasonlósági transzformációval diagonalizálható.*

7.1.5 Schur tétele

Minden mátrix unitér hasonlósági transzformációval felső háromszög alakra hozható.

Bizonyítás. Jelölje a Householder tükröző mátrixot. Legyen egy normált sajátvektor, , amelyet skálázzunk úgy, hogy az első eleme valós, nempozitív szám legyen. (Ezt

mindig elérhetjük, ha a vektort a nemzérus számmal beszorozzuk.) Ekkor és . Feltéve, hogy teljesül,

Mivel involutórius, a hasonlósági transzformációt végeztünk, ahol az első oszlopvektor az vektor -szorosába ment át, amivel a felső háromszög alak az első sorban és oszlopban előállt. Az eljárást folytatva az eggyel kisebb méretű jobb alsó blokkokra, végül a kívánt alakra jutunk. ■

Megjegyzés. Ha , akkor első oszlopa már alakú. A felső háromszög-alakra hozás egy lépése egyben *deflációs módszer*, mert olyan 1-gyel kisebb méretű mátrixot kapunk a jobb alsó sarokban, amelynek a sajátértékei a megtalált -t kivéve megegyeznek a kiinduló mátrixéval.

A Schur-tétel segítségével további fontos tulajdonságok láthatók be.

7.1.6 Tétel, diagonalizálhatóság unitér hasonlósági transzformációval

Az mátrix normális unitér hasonlósági transzformációval diagonalizálható.

Bizonyítás. normális, ha teljesül , a transzponált konjugáltat jelöli.

: Tfh Legyen , innen .

: Ha normális, akkor bármely unitér hasonlósági transzformáltja is az. Legyen a Schur-tétel alapján felső háromszögmátrix, ekkor . Ennek az 1,1-indexű eleme:

,

azaz első sorának kettes normája megegyezik az első oszlopéval. Ez csak úgy lehetséges, ha . Az eljárást folytatva az eggyel kisebb méretű jobb alsó blokkal, minden sorra azt kapjuk, hogy csak főátlóbeli elem lehet nemzérus. ■

A tétel következménye, hogy a valós szimmetrikus mátrixok ortogonális, az hermitikus mátrixok pedig unitér hasonlósági transzformációval diagonalizálhatók. E mátrixok sajátértékei mindig valósak.

7.1.7 Tétel

Az egyszeres sajátértékhez tartozó bal- és jobboldali sajátvektorok skaláris szorzata nemzérus: .

Hozzuk a mátrixot unitér hasonlósági transzformációval felső háromszög alakra: . Ekkor a sajátvektorok átmennek az és vektorokba, ahonnan látható, hogy skaláris szorzatuk nem változik meg. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

alakú, ahol az és vektorhoz tartozó sajátérték. A transzformálás után átment -be, a bal oldali vektor pedig legyen . Ha ezzel balról szorozzuk -t , akkor

,

ahonnan . Ha itt zérus volna, akkor a jobb alsó blokknak sajátértéke volna. Ez ellentmondana annak, hogy egyszeres sajátérték. ■

3) Fennáll a hibabecslés: .

Bizonyítás. Az sorozat Cauchy-sorozat:

. Így a sorozat egymás utáni tagjai egyre közelebb vannak egymáshoz: van határérték. Legyen most . Ekkor a teleszkópikus összeg képzésével

mellett kapjuk a 3) állítást. ■

A tétel szerint az iteráció konvergens, ha az leképezés kontrakció:

Innen látható, kontrakció van, ha . Bizonyítás nélkül megjegyezzük: a spektrál sugár az indukált normák infimuma. Emiatt mondhatjuk: konvergens, ha spektrál sugara .

10.2. Jacobi-iteráció

Legyen felbontása , ahol , a mátrix főátló alatti, a főátló feletti része (szigorúan *alsó* ill. *felső* -mátrixok).

A Jacobi-iterációnál a választás, ezzel

(10.4)

Komponensenkénti alak: .

Tárigény: . Célszerű kezdővektor, ha nincs jobb: .

10.2.1 Tétel

Ha sor szerint szigorúan főátló-domináns, akkor a Jacobi-iteráció konvergens.

Bizonyítás. , tehát van kontrakció.

10.3. Gauss-Seidel iteráció

A Gauss-Seidel iterációnál a választás, ezzel

(10.5)

A Gauss-Seidel iteráció komponensenkénti alakját -edik sorának kiírásából kapjuk:

(10.6)

5. Mutassuk meg, hogy , ahol a 0-adik momentum.
6. Mutassuk meg, hogy a

háromátlójú mátrix bal felső sarok-aldeterminánsai parméterekkel bíró ortogonális polinomokat adnak.

10. Lineáris egyenletrendszerek megoldása iterációval

A lineáris egyenletrendszerek megoldását nem mindig célszerű véges módszerrel készíteni. Ha a mátrix nagyméretű és ritka – azaz soronként csak kevés nemzérus elem található – akkor az *LU*-felbontás hátránya, hogy felbontáskor a mátrix nemzérus elemeinek száma megnő – besűrűsödik – ez egyrészt tárolási kérdéseket vet fel, másrészt a sok nemzérus elem miatt megnő a munkaigény. Az iterációs módszereknél ilyen nehézségek nem lépnek fel, de probléma, ha a konvergencia lassú.

10.1. Egyszerű iteráció

Legyen egy felbontása

(10.1)

Ha invertálható, akkor az ilyen felbontást *regulárisnak* hívjuk. Ekkor a következő iterációs módszert készíthetjük: , azaz

(10.2)

ahol a vektor felső indexében az iterációszámot jelöli. A mátrixot *iterációs mátrixnak* nevezzük. Kérdés, mikor remélhető, hogy a fenti iteráció konvergens és az milyen sebességű?

10.1.1 A konvergencia vizsgálata

Az függvény kontrakció, ha van olyan szám, amelyre esetén

(10.3)

teljesül. Itt a *kontrakciós állandó*, vagy *kontrakciószám*. Figyeljük meg, azt jelenti, hogy a leképezett vektorok közelebb kerülnek egymáshoz.

10.1.2 Tétel. (Banach fixponttétel)

Legyen egy leképezés kontrakciós állandóval. Akkor

1) , azaz van az iterációnak fixpontja.

2) kezdőértékre konvergens sorozat és .

7.1.8 Jordan-blokkok

A

(7.3)

alakú mátrixot *Jordan-blokknak* nevezzük. Ez a hasonlósági transzformációval nem diagonalizálható mátrixok prototípusa. Ránézésre látható, hogy a karakterisztikus polinomja , tehát -szoros gyök. A sajátértékhelyen a karakterisztikus mátrix rangvesztése csak 1, mert a bal alsó sarokelemhez tartozó aldetermináns éppen az átló feletti -esek szorzata lesz, így a rang csak eggyel csökken. Következésképp 1 jobb és baloldali sajátvektor van, és , amelyek skaláris szorzata 0, ha .

A sajátérték karakterisztikus polinombeli multiplicitását *algebrai multiplicitásnak,* nevezzük. A sajátértékhez tartozó sajátvektorok által kifeszített altér dimenziója pedig a sajátérték *geometriai multiplicitása,* . A fenti Jordan-blokknál és .

Bizonyítás nélkül megemlítjük, hogy általában a mátrixok hasonlósági transzformációval *Jordan-féle kanonikus alakra* hozhatók, ahol minden sajátértékhez egy vagy több Jordan-blokk tartozik, amelyek a főátló mentén helyezkednek el. Lehetséges -es Jordan-blokk, az egyszeres sajátértékeknek például ez van. Könnyen belátható, hogy a sajátértékhelyen a karakterisztikus mátrix rangvesztése egyenlő -vel, ami a sajátértékhez tartozó Jordan-blokkok száma, a sajátérték algebrai multiplicitása viszont egyenlő a hozzátartozó Jordan-blokkokban lévő átlóelemek számával.

7.1.9 Feladatok

1. Legyen olyan felső Hessenberg mátrix, amelynek minden átló alatti eleme nemzérus. Mutassuk meg, hogy ennek a mátrixnak minden sajátértékéhez csak 1 Jordan-blokk tartozhat.
2. Mutassuk meg, ha sajátértékei a -k, akkor sajátértékei -k.

7.2. A sajátértékek lokalizációja

Mivel még valós mátrixoknak is lehetnek komplex sajátértékei, emiatt a komplex síkon kell megadni olyan tartományokat, ahol a sajátértékek lehetnek. Egy ilyen becsléssel már megismerkedtünk a normákkal foglalkozó 2.8 szakaszban, mely szerint a spektrál sugár nem nagyobb, mint a mátrix valamely indukált normája. Így egyik sajátérték sem lehet nagyobb abszolút értékben, mint például vagy . Ennél pontosabb becslést tesz lehetővé

7.2.1 Gersgorin tétele

Legyen az -edik Gersgorin-kör középpontja , sugara pedig , ami nem más, mint a mátrixban az -edik sorelemek abszolút összege a diagonálelem kivételével. A tétel szerint az mátrix sajátértékei a Gersgorin-körök egyesített halmazában vannak.

Bizonyítás. Tekintsük az egyenlet -edik sorát, ahol sajátvektor, a hozzátartozó sajátérték, és . Kissé átrendezve: , ahonnan

. Minden sajátértékre felírhatunk egy ilyen összefüggést, ez adja az állítást. ■

7.2.2 Második tétel

Ha a Gersgorin köröknek vannak diszjunkt részhalmazai, akkor minden ilyen részhalmazban annyi sajátérték található, amennyi a hozzá tartozó Gersgorin körök száma.

Bizonyítás. Fel kell használnunk azt az itt nem bizonyított eredményt, hogy a mátrix sajátértékei a mátrixelemek folytonos függvényei. Bontsuk a mátrixot két részre, és képezzük az mátrixot, ahol a főátlót tartalmazó diagonálmátrix, pedig a nemdiagonális rész. Ha most , akkor minden kör sugara zérus. Ha 1-hez tart, akkor minden sajátérték kifuthat a középpontból, de a folytonosság miatt nem ugorhat át egy másik diszjunkt körhalmazba. ■

7.2.3 Példa

A Gersgorin-tétel alkalmazását kombinálhatjuk diagonálmátrixszal készített hasonlósági transzformációval. Ezzel változtatni tudjuk a körök sugarát, és egyszerűen készíthetünk a célnak megfelelő becslést. Például mutassuk meg, hogy a

mátrixnak nincs zérus sajátértéke!

Az első Gersgorin kör középpontja 8, sugara szintén 8, így ez a kör tartalmazza a zérust. A többi kör nem. Alkalmazzuk a hasonlósági transzformációt, ahol :

ezzel a kívánt célt elértük, mert az első kör sugara 4-re csökkent és a másik két kör továbbra sem tartalmazza a zérust. Figyeljük meg, milyen sor és oszlopban lesz változás, ha az alkalmazott diagonálmátrixban csak egy elem különbözik 1-től!

7.2.4 Feladatok

Bizonyítsuk be:

1. A mátrix főátló-domináns, ha a Gersgorin körök nem tartalmazzák a zérust.
2. A főátló-domináns mátrixok invertálhatók, mert nincs zérus sajátértékük.
3. Az - és -edik sorok és oszlopok cseréje a diagonál-dominanciát nem változtatja meg.
4. A mátrix rangja legalább akkora, mint azon Gersgorin körök száma, amelyek nem tartalmazzák a zérust.
5. A baloldali sajátvektorok segítségével is készíthetünk Gersgorin-köröket a mátrix oszlopai szerint.

A rekurzióból felépített ortogonális polinomokkal a mért függvényértékek a következőképp közelíthetők:

. (9.11)

Ez az előállítás formálisan ugyanúgy néz ki, mint a lineáris algebrában egy ortogonális vektorrendszer szerinti kifejtés: legyen -dimenziós vektor, ekkor

. (9.12)

A (9.11)-ben látható kifejezés is szimmetrikus projektor, így a (9.11) közelítés rendelkezik a legkisebb négyzetes tulajdonsággal: a polinomok által kifeszített altértől való távolságot jelenti.

9.3.1 Példa

Ortogonális polinomokkal állítsuk elő azt az elsőfokú polinomot, amely az alábbi pontsort legkisebb négyzetesen közelíti:

	-1	0	1	2
	1	2	2	4

Megoldás. Először előállítjuk az ortogonális polinomokat. , innen . Következik , ahol . Még meg kell állapítanunk önmagával vett skaláris szorzatát: . Ezzel a legkisebb négyzetesen közelítő elsőfokú polinom:

9.4. Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogyha az alappontok -ra szimmetrikusan helyezkednek el, akkor , és a polinomok váltakozva páros és páratlan függvények.
2. Készítsük el a ortogonális polinomokat a alappontokra!
3. A Csebisev polinomok is ortogonális polinomok, amelyek a következő rekurzióval állíthatók elő: . Ez a szokásos alak, bár így nem 1-főegyütthatósak. Állítsuk elő a polinomot Csebisev-polinomok szerint!
4. . Az helyen ekkor mi a célszerű kiszámítási módja -nak?

(9.6)

Bizonyítás. Vizsgáljuk az

skaláris szorzatot! Az eredmény zérus, ha

a *9.1.3 Következmény* miatt. Nemzérus az eredmény, ha

így kifejthető a polinomokkal:

ahonnan -re rendezve kapjuk (9.6)-öt. ■

9.2.1 Tétel

Az és kifejtési együtthatókra érvényes

(9.7)

(9.8)

Bizonyítás. Helyettesítsük értékét a rekurzióból. Az ortogonalitás miatt értéke rögtön adódik, ha a (9.6) rekurzió mindkét oldalán skaláris szorzatot képezünk -nel. értéke hasonlóan készül, csak most a skaláris szorzatot -gyel vesszük. Az átalakításban -et átvisszük -hez, és az 1-gyel kisebb indexű rekurziós összefüggést helyettesítjük:

■

9.3. Legkisebb négyzetes közelítés ortogonális polinomokkal

A (9.2) skaláris szorzat mellett az induló polinomok, ha minden -re

(9.9)

A következő polinomot -et keressük alakban! Ekkor az ortogonalitás miatt

ahonnan

, (9.10)

így -t zérusnak vehetjük.

6. Döntsük el Gersgorin tétele és diagonálmátrix hasonlósági transzformáció segítségével, hogy

invertálható-e: .

7.3. A karakterisztikus polinom számítása

Tekintsük az un. *Frobenius-féle kisérő mátrixot*:

. (7.4)

Az utolsó oszlopa mentén kifejtve igazolható, hogy . Eszerint a karakterisztikus polinom együtthatóinak előállítása könnyű, ha van valamilyen hasonlósági transzformáció, ami az mátrixot ilyen alakra hozza. Danyiljevszkij ötelete szerint ez megvalósítható a Gauss-Jordan módszernél megismert egyszerű transzformációs mátrixszal, ha a mátrix első oszlopát nem -be, hanem -be visszük. Legyen tehát az első transzformációs mátrix , és ekkor a hasonlósági transzformáció eredményeként az első oszlop lesz:

.

Általában a -adik lépésben , és a korábbi oszlopvektorok sem romlanak el, mert az előbbihez hasonlóan kapjuk:

.

Egy transzformációs lépés végrehajthatóságának feltétele, hogy a diagonálelem alatti elem legyen zérustól különböző. Ha nem így volna, sor-cserével mozgassunk egy átló alatti nemzérus elemet az átlóelem alá és hajtsuk végre a hasonló oszlopok cseréjét is a hasonlósági transzformáció megőrzése végett. Az algoritmus -edik lépésében a (7.4) alakhoz jutunk.

Ha a mátrix háromátlójú, a karakterisztikus polinom egyszerű rekurzióval számolható. Például a

determináns rekurziója

, (7.5)

ahol a bal felső -edrendű blokk determinánsa. Az -edrendű determinánst az -edik oszlop szerinti kifejtéssel kapjuk és az eredmény a kapott rekurzió. A rekurzióval a polinom helyettesítési értékét is könnyen számolhatjuk.

A rekurziót meg lehet csinálni a felső Hessenberg-mátrix karakterisztikus polinomjára is. Legyen például és alulról felfelé oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

.

Az utolsó sorból , a második sorból pedig , ahonnan kifejezhető. Ezekkel az első sor adja kifejezését. A mátrix determinánsa akkor lesz zérus, ha zérus, tehát gyökei megegyeznek a mátrix sajátértékeivel. Figyeljük meg, esetén a sajátértékhez tartozó sajátvektor elemei.

7.3.1 Feladat

Igazoljuk, hogy a -es mátrix sajátértékei: .

7.4. Tétel

Minden mátrix unitér hasonlósági transzformációval felső Hessenberg-alakra hozható.

Bizonyítás. Az első lépésben legyen , tehát első oszlopából az átlóelemet elhagyjuk. A hasonlósági transzformációt az tükröző mátrixszal végezzük, ahol a kivonási jegyveszteség elkerülése érdekében előjelét aszerint választjuk, hogy második elemének valós része legyen negatív. Ekkor az első oszlopot -be viszi, (az első elem változatlan az első oszlopvektor második elemmel kezdődő részét pedig -be tükröztük). Ugyanezzel a tükröző mátrixszal jobbról szorozva az első oszlop már nem fog változni, mert első sora és oszlopa és . Ezzel első oszlopa mutatja a Hessenberg-alakot. A következő lépésben az imént látottakat alkalmazzuk eggyel kisebb méretű jobb alsó blokkjára. Az eljárást folytatva végül a kívánt teljes Hessenberg-alakra jutunk. ■

7.5. Iterációs módszerek

7.5.1 A hatványiteráció

A módszer azon az észrevételen alapul, hogy növekedésével -ben a legnagyobb sajátértékhez tartozó komponens fog felerősödni. A konvergenciára kimondhatjuk a következő tételt:

Tegyük fel -edrendű valós vagy komplex mátrix és a sajátértékeire teljesül

.

Továbbá a mátrix egyszerű struktúrájú, azaz annyi sajátvektora van, mint a mátrix rendje. Ekkor a spektrálfelbontás , ahol a bal és jobb sajátvektorok és kifejthető a sajátvektorok szerint: . Ekkor

(7.6)

(9.1)

ahol -et súlyfüggvénynek nevezzük és feltesszük, hogy a kijelölt integrál létezik. Mi most a polinomok használatával összefüggésben egyszerűbb skalárszorzatot fogunk használni, nevezetesen:

(9.2)

ahol az illesztés alappontjait, pedig a hozzátartozó súlyokat jelenti. Gyakran minden -re.

Ellenőrízzük, hogy a fenti definiciók rendelkeznek a skaláris szorzat tulajdonságaival!

Természetesen most is igaz, hogy a skaláris szorzat normát definiál:

. (9.3)

Ezek után semmi akadálya sincs annak, hogy az lineárisan független rendszerből Gram-Schmidt ortogonalizációval ortogonális rendszert készítsünk: így kapjuk az *ortogonális polinomokat.*

9.1.1 Definició.

1-*főegyütthatós* az a polinom, amelynél 1 a legmagasabb fokú tag együtthatója.

9.1.2 Tétel

Legyenek 1-főegyütthatós -edrendű polinomok. Ekkor bármely polinom egyértelműen előállítható a polinomok lineáris kombinációjaként:

. (9.4)

Bizonyítás. Legyen , ekkor a együtthatókat meghatározó lineáris egyenletrendszer:

(9.5)

.

Ez alulról felfelé haladva egyértelműen megoldható.

9.1.3 Következmény

Legyenek -k ortogonális polinomok. Akkor ortogonális minden legfeljebb -edfokú polinomra.

9.2. Az ortogonális polinomok rekurziója

Az 1-főegyütthatós ortogonális polinomok a és polinomok ismeretében rekurzíve felépíthetők:

megoldása. Ha a rendszer inkonzisztens, akkor az a legkisebb négyzetes megoldás, melyre kettes normája minimális. Minden az esetben a minimális kettes normájú megoldás.

Bizonyítás. A 8.1.4 Tétel alapján a vektor -tól való távolsága. Továbbá vegyük észre, (8.5)-ben két ortogonális vektor van, mert az első vektort a pszeudoinverz tulajdonságok miatt helyben hagyja, a másodikat pedig zérusba viszi. Emiatt írhatjuk: .

Ez akkor a legkisebb, ha , vagy . ■

8.4. Feladatok

1. Legyen egy rang-faktorizáció. Ekkor írjuk fel azt a szimmetrikus vetítőmátrixot, amely -ba vetít.
2. Írjuk fel az mátrix null-terébe vetítő szimmetrikus projektort! Adjuk meg az vektor -tól való távolságát!
3. Egy egyenes áthalad az ponton. Adjuk meg az vektor és ez az egyenes távolságát!
4. Igazoljuk, hogyha a mátrix invertálható, akkor a pszeudoinverze megegyezik az inverzével.
5. . Írjuk fel az -ba vetítő szimmetrikus projektort!
6. Két sík normálvektorát az 5. feladat sorvektorai adják. Melyik az a szimmetrikus projektor, amely a két sík közös részébe vetít?
7. . végpontja milyen távol van az előbbi két sík közös részétől?
8. ,
9. Az előbbi mátrixszal mi lesz pszeudoinverzes megoldása, ha ?
10. Igazoljuk, hogy , ha oszlopai lineárisan függetlenek.
11. A pszeudoinverz 4 tulajdonságából vezessük le: .
12. Az mátrix közelítő sajátvektora . A hozzátartozó sajátértéket úgy szeretnénk közelíteni, hogy minimális legyen. Mi lesz ekkor kifejezése?

9. Ortogonális polinomok

Gyakran polinommal kell végezni a legkisebb négyzetes illesztést. Ilyenkor speciális módszert készíthetünk ortogonális polinomok segítségével. Később a numerikus integrálási módszereknél is szükségünk lesz az ortogonális polinomokra, így most röviden megismerkedünk velük.

9.1. Függvények skaláris szorzata.

Az és függvény skaláris szorzatát a következő utasítással definiáljuk:

Bizonyítás. A módszer szerint képezzük az vektorokat és innen kapjuk

. Az határátmenettel kapjuk az állítást, mivel a többi sajátvektor szorzója zérushoz tart. ■

Látjuk, a konvergencia gyorsaságát esetén lényegében a hányados szabja meg. Az algoritmus:

A normának célszerű például a végtelen normát választani. A sajátérték a

kifejezéssel becsülhető. A hatványmódszerrel a spektrum (= a mátrix sajátértékeinek összessége) szélein lévő egyszeres sajátértékeket kereshetjük sikerrel. Az *inverz hatányiterációval* azonban kereshetjük a spektrum belsejében elhelyezkedő sajátértékeket is. Ekkor az iteráció egy lépésében az

vektort számítjuk. A mátrix sajátértékei , innen látható: ez is hatványiteráció, ami a paraméter értékéhez legközelebb eső sajátértékhez és a hozzátartozó sajátvektorhoz fog tartani.

A sajátprobléma megoldására az egyik legjobb módszer a -módszer. Ekkor elkészítjük az -felbontást és a következő mátrix , tehát egy ortogonális hasonlósági transzformáció eredménye. A -edik lépésben . Megmutatható, hogy amennyiben a mátrix egyszerű struktúrájú és a sajátvektorok mátrixának van -felbontása, akkor a -módszer egy felső háromszögmátrixhoz konvergál. A konvergencia még gyorsítható, ha a felbontásokat kombináljuk egy mátrixszal való eltolással is, ahol a sajátérték egy becslése. Ekkor a -módszer konvergencia-sebessége másodrendű, szimmetrikus mátrixoknál harmadrendű lesz.

7.6. A sajátértékfeladattal kapcsolatos egyenlőtlenségek

A Gersgorin-körök ismertetése során már megismerkedtünk ilyen összefüggésekkel. Itt folytatjuk a vizsgálatainkat. Arra vagyunk kiváncsiak, hogyha van egy közelítő sajátpárunk, mit mondhatunk a jóságának jellemzésére. Egy másik feladat, hogyha a mátrixelemeket kissé megváltoztatjuk (– perturbáljuk), hogyan változik meg a sajátpár?

A következő *jelöléseket* alkalmazzuk: és feltesszük, hogy a mátrix invertálható. Mindig indukált mátrixnormát használunk.

A spektrálsugár és az indukált normák összefüggéséből már ismerjük: , a kettő összeszorzásából:

. (7.7)

Ez jelzi számunkra, hogyha abszolút értékben a legnagyobb és legkisebb sajátérték hányadosa nagy, akkor a mátrix kondiciószáma nagy.

7.6.1 Lemma

Legyen diagonálmátrix, ekkor .

Bizonyítás. Legyen minden -re. Az indukált norma definiciót alkalmazva

,

mert a nevező kisebb a számlálónál, ha van olyan nemzérus elem, amelyre . ■

7.6.2 Tétel, sajátpár jósága

Legyen egyszerű szerkezetű: , ahol a sajátvektorok mátrixa és a sajátvektorokat tartalmazó diagonálmátrix, továbbá a sajátpár egy közelítése. Ekkor az jelöléssel

. (7.8)

Bizonyítás. Ha valamely -re, akkor az állítás igaz. Tegyük fel, , ezzel invertálható: . A normákra áttérve és az előző lemmát alkalmazva

.

A kapott egyenlőtlenséget rendezve kapjuk a állítást. ■

7.6.3 Következmény

Hermitikus mátrixokra unitér, emiatt és , ami nagyon egyszerűen számolható.

7.6.4 Tétel, alsó becslés cond(U)-ra

Ha egyszerű szerkezetű és invertálható,

(7.9)

Bizonyítás. A harmadik összefüggés az első kettő összeszorzásával adódik. Az első egyenlőtlenség az normáját képezve adódik, a második pedig az kifejezésből. ■

7.6.5 Feladatok

Mutassuk meg, hogy

1. .
2. .
3. .

8.3.4 Tétel, a pszeudoinverz előállítása

Legyen egy rang faktorizáció. Akkor egyértelműen létezik , ahol és .

Bizonyítás. Az egyértelműséget indirekt úton bizonyítjuk. Tegyük fel van kettő: és . Ekkor a szimmetrikus projektor egyértelműsége miatt illetve . Ezeket, és a definiáló egyenleteket felhasználva adódik

,

amivel ellentmondásra jutottunk. A továbbiakban megkonstruáljuk a pszeudoinverzet.

Vegyük észre: , így ebbe az altérbe vetítő egyértelmű szimmetrikus projektor , és következik a 8.3.1 Lemmából. Hasonlóan az altérbe vetítő egyértelmű szimmetrikus projektor , ahonnan . Ezek alapján -edrendű egységmátrixok, és ezzel

Ebből kiolvasható, hogy . ■

8.3.5 Megjegyzések

Ha oszloprangú, akkor és megfelelő választás, és következik. Az faktorizációnál kapjuk: . Ha sorrangú, akkor és a megfelelő választás, amivel . Ha most , akkor . Végül, ha rangja kisebb, mint a legkisebb mérete, azaz, vannak lineárisan összefüggő sorok és oszlopok, akkor mindkét oldal felől végzett ortogonalizációval elérhető az alak, ahol ortogonális mátrixok és felső bidiagonális mátrix. Ekkor . Mátrixoknál a rang numerikus meghatározása néha nagyon kényes feladat.

8.3.6 Tétel, lineáris egyenletrendszer megoldhatósága

Legyen -ba vetítő projektor. Ekkor az egyenletrendszer akkor és csak akkor konzisztens (megoldható), ha .

Bizonyítás. Szükségesség. Ha a rendszer megoldható, akkor és -nek teljesülni kell. Az elégségességhez válasszuk az szintén -ba vetítő projektort, amelyre teljesül. Innen kiolvasható, hogy egy megoldás. ■

8.3.7 Tétel, a pszeudoinverzes megoldás tulajdonságai

Az lineáris egyenletrendszer általános megoldása a pszeudoinverz segítségével a következőképp állítható elő:

(8.5)

ahol egy partikuláris megoldás és a homogén egyenlet általános megoldása. Ha a rendszer megoldható, akkor egy partikuláris megoldás és a homogén egyenlet általános

Bizonyítás. Minthogy zárja be a legkisebb szöget -szel, így a irány mentén található az a pont -ban, amely legközelebb van végpontjához. Keressük tehát azt a -t, amelyre norma-négyzete

minimális. Deriválással kapjuk, hogy a minimum helye -nél van. Tehát és a kettes normája az vektor altértől való távolsága. ■

8.3. Mátrixok általánosított inverze, a pszeudoinverz

Mátrixok általánosított inverzét akkor értelmezzük, ha az inverzük nem létezik. A pszeudoinverz a lineáris egyenletrendszernek azt a megoldását adja, amelyre az eltérés vektor, más szóval reziduum, kettes normája minimális. Ha több megoldás is van, akkor a legkisebb kettes normájú megoldást szolgáltatja. Emlékeztetőül két kis lemma felidézésével kezdjük.

8.3.1 Lemma.

Legyenek az mátrix oszlopai lineárisan függetlenek. Akkor -ből következik.

Bizonyítás. Átrendezve . oszlopainak bármely lineáris kombinációja a lineáris függetlenség miatt csak akkor lesz zérusvektor, ha oszlopvektorai zérusok. ■

8.3.2 Lemma.

Legyen . Ekkor pozitív szemidefinit. Ha oszlopai lineárisan függetlenek, azaz oszloprangú, akkor pozitív definit.

Bizonyítás. Legyen , ekkor . Ha oszloprangú, az előző lemma alapján -ból következik , így ez esetben pozitív definit. ■

8.3.3 A pszeudoinverz

A továbbiakban megmutatjuk, hogy minden mátrixhoz létezik pszeudoniverz, vagy Moore-Penrose féle általánosított inverz , mely a közönséges inverzzel egyenlő, ha a mátrix nemszinguláris, egyéb esetben viszont minimális kettes norma tulajdonságokkal rendelkezik. Ezt a mátrix inverzet a következő tulajdoságok definiálják:

A definició komplex mátrixokra vonatkozik, mi most valós esetben a hermitikus tulajdonság helyett a szimmetrikusságot követeljük meg. Vegyük észre: Ha az első egyenletet jobbról, vagy balról szorozzuk -tel, az adódik, hogy és projektorok és a 3. és 4. feltétel szerint még szimmetrikusak is. Az első feltétel alapján -ba vetít, az alakból pedig azt látjuk, hogy a -ba vetítő szimmetrikus projektor.

Tegyük fel: , ahol és közbülső mérete , . A továbbiakban az rang-faktorizáció ismeretében előállítjuk a pszeudoinverzet.

7.6.6 Tétel, (Bauer, Fike)

Legyen egyszerű szerkezetű és egy ugyanolyan méretű mátrix. Ha az egy sajátértéke és , akkor

. (7.10)

Bizonyítás. Tegyük fel , mert különben igaz az állítás. Mivel sajátérték, következik, hogy szinguláris, ahonnan átrendezéssel adódik. Ez az utóbbi mátrix pedig csak akkor lehet szinguláris, ha -nek van egy 1 abszolút értékű sajátértéke, amiből . Ezt rendezve kapjuk az állítást. ■

7.6.7 Tétel, inverz perturbáció

Legyen egy közelítő sajátpár, . Ekkor az (F a Frobenius-norma) mátrixszal a sajátpár az

(7.11)

egyenlet pontos megoldása.

Bizonyítás. . ■

Például, ha , a mátrix elemei 1 körüliek, akkor pontos megoldása egy mátrixnak, ami -tól csak a kilencedik jegyében különbözik. Ha -t csak 7 jegyre ismerjük, akkor nincs értelme tovább folytatni az iterációt.

7.6.8 Tétel, egyszeres sajátérték perturbációja

Legyen egy -hoz tartozó sajáthármas, ahol egyszeres sajátérték. Az mátrix sajátértékének megváltozása első rendben

(7.12)

és

. (7.13)

Bizonyítás. A második összefüggés az első következménye, ha normákra térünk át. Az első bizonyításához legyen a sajátérték megváltozása , a sajátvektoré pedig :

.

Feltesszük, hogy esetén és . Beszorzás után a másodrendű tagokat hagyjuk el:

.

Szorozzuk ezt a kifejezést balról az sajátvektorral, ekkor mindkét oldalon az első vektorok is kiesnek és az első bizonyítandó összefüggéshez adódik

. (7.14)

Itt a nevező nem lehet zérus a 7.1.7 Tétel miatt. (7.13)-ban szorzója nem más, mint az és vektoroknál a bezárt szög koszinuszának reciproka: . Szokás ezt az értéket a *sajátérték kondiciószámának* nevezni. ■

8. A legkisebb négyzetek módszere

8.1. Egy illesztési feladat.

Gyakran találkozhatunk a következő feladattal: adottak a , pontok, ahol a helyhez tartozó értéket valamely merésből kapjuk. A mért függvényértékeket hiba terheli. Az előálló pontsorozatot – vagy annak egy részét - szeretnénk egy függvénnyel közelíteni (pl.):

. (8.1)

Ésszerűnek látszik ezt a feladatot úgy megoldani, hogy az eltérések négyzetösszege minimális legyen:

(8.2)

vagyis, (6.1)-ben a lineárkombinációs együtthatókat e feltétel szerint keressük. A (6.1) feladat a ismeretlenekre egy lineáris egyenletrendszer, így tekintsük általánosan az

(8.3)

egyenletrendszert, ahol most az együtthatómátrix nem kvadratikus, hanem téglalap alakú, és az sem biztos, hogy mindig van megoldása. A legkisebb négyzetes tulajdonságnak eleget tevő megoldáshoz ( ) vizsgáljuk meg a projektor (vetítő) mátrixokat!

8.2. Vetítő mátrixok, projektorok

8.2.1 Definició

A mátrixot projektor vagy vetítő mátrixnak nevezzük, ha eleget tesz a összefüggésnek.

Innen rögtön következik: . Ha invertálható, akkor -et a definiáló egyenletre alkalmazva kapjuk: Ugyancsak egyszerű ellenőrízni, hogyha projektor, akkor is az.

Figyeljük meg: a transzformált vektort egyszeri alkalmazás után helybenhagyja: . Ezután akárhányszor alkalmazzuk a projektort, az eredmény ugyanaz marad, ugyanúgy, mint

vetítéskor. Mivel akárhányadik hatványa önmaga, emiatt használatos az *idempotens mátrix* elnevezés.

Példa projektorra: Legyen , jelölje a transzponáltat és legyen invertálható. Ekkor

olyan projektor lesz, amely oszlopvektorainak alterébe vetít:

-ból pedig következik: bármely vektorra .

8.2.2 Tétel.

Legyen az altérbe vetítő projektorok halmaza. Ekkor bármely vektorra

,

ahol az altérbe vetítő szimmetrikus projektor.

Bizonyítás. Szemléletesen szólva: az vektorral zárja be a legkisebb szöget. Ha akkor

hiszen oszlopvektorai az altérbe esnek, és ezeket egy másik olyan projektor mindig helybenhagyja, amely ugyanabba az altérbe vetít. Felhasználva a Cauchy-egyenlőtlenséget, adódik

, (8.4)

ahol a maximum még a feltételt kielégítő projektorok mellett is előáll. ■

8.2.3 Tétel

Ugyanazon altérbe vetítő projektorok között a szimmetrikus projektor egyértelmű.

Bizonyítás. Indirekt. Tegyük fel, és két ugyanabba az altérbe vetítő különböző szimmetrikus projektor, ekkor

ahonnan ellentmondásra jutottunk. ■

8.2.4 Tétel

Az vektor altértől való távolsága kettes normában:

.