

## 6. Gram-Schmidt ortogonalizáció, QR-felbontás

Az egyszerű lineáris algebrai transzformációk között a harmadik fejezetben megismertedtünk a vetítő mátrixokkal. E mátrixok alkalmazása arra, hogy a vektorok egy adott készletéből ortogonális vektorokat állítsunk elő. Ha ezen vektorokat egy mátrix oszlopaitba rendezzük, akkor a kapott módszer a mátrix egy újabb felbontását szolgáltatja, ezt hívjuk a  $QR$ -felbontásnak.

### 6.1. A Gram-Schmidt ortogonalizáció

Tegyük fel, van egy lineárisan független vektorokból álló halmaz:  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Szeretnénk e vektorok felhasználásával olyan ortogonális rendszert készíteni, amellyel a halmaz vektorai előállíthatók. Ekkor eljáratunk a következőképpen. A készülő ortogonális vektorokat jelöljük  $u_1, u_2, \dots, u_n$ -val.

Az első lépésben válasszuk  $u_1 = v_1$ -et. A következő vektort készítsük úgy, hogy az  $u_1$ -re szimmetrikus - vagy más szóhasználattal - ortogonális vetítéssel ortogonalizáljuk  $v_2$ -re:

(6.1)

Beszorzással  $u_1$ . A következő vektort úgy készíjük, hogy az  $u_1$  vektort és  $u_2$ -re ortogonalizáljuk:

(6.2)

Ismét beszorzással ellenőrizve kapjuk, hogy  $u_2$  és  $u_1$ . A továbbiakban vezessük be az  $u_3$ -edik ortogonális vektorhoz a

(6.3)

vetítőmátrixot. Látjuk, ha ezzel a mátrixszal bármely vektorra szorzunk, eredményül a vektorra ortogonális vektorhoz jutunk.

Az  $u_3$ -edik ortogonális vektort a következő vetítések sorozatával kapjuk az  $u_2$  vektorból:

(6.4)

Vegyük észre, a vetítőmátrixok a szorzatban tetszőleges sorrendben írhatók a bennük szereplő vektorok ortogonalizálása miatt. Fennáll az összefüggés:

(6.5)

aminek az igazolását egy feladatra hagyjuk. Ez mutatja, hogy numerikusan kétféle lehetőség van az ortogonalizálásra. Az egyik, amikor a fenti összefüggésben a szummás alakot használjuk. Ekkor minden vektor az  $u_1, u_2, \dots, u_n$  vektorokkal szorzódik és (6.4), (6.5) összevetéséből kapjuk:

(6.6)

azaz minden  $u_i$  vektor az ortogonális vektorok segítségével előállítható, ahol a kifejtési együtthatók

## 10.6. Egy lépésben optimális paraméter meghatározása

Láttuk, (10.11)-ben az vektorból kiindulva az

$$(10.12)$$

vektort készítjük, a Gauss-Seidel módszer vektora helyett. Vezessük be az ,  
jelöléseket és határozzuk meg az paramétert általánosan az  
felbontás  
mellett! (10.12)-ből kapjuk:

$$(10.13)$$

Határozzuk meg a -adik lépésben -t abból a feltételből, hogy minimális! Ehhez nem kell  
mást tenni, mint az „egyenletet” a pszeudoinvertéssel -ra megoldani:

$$(10.14)$$

Hogy ne kelljen -et explicit módon előállítani, a relaxáció nélküli alakból kifejezzük -t:

$$(10.15)$$

innen

$$(10.16)$$

Az meghatározásához vezessünk be egy újabb vektort:

$$(10.17)$$

és ekkor a következő iterációs algoritmust készíthetjük:

## 6.2.1 Feladatok

- A G-S ortogonalizációnál kidolgozható az a változat, amikor a vektorok normáltak, írjuk át a formulákat erre az esetre!
- Legyen , ezzel oszlopvektorai normáltak. (6.9)-ben legyen . Adjunk meg -et mátrixos alakban és a normált ortogonális vektorok segítségével fejezzük ki -t!
- A 3.12 gyakorlatban láttuk, hogy minden vektor egy vektorba vihető tükrözéssel, ahol . Ha egy ilyen tükrözést alkalmazunk első oszlopára, akkor a -felbontás az első oszlopra megvalósult: ortogonális mátrix, ahol és  
Hogyan folytassuk a tükrözéseket, hogy egy -felbontáshoz jussunk?
- Ha rendelkezésünkre áll egy -felbontása, hogyan oldjunk meg egy egyenlet-rendszert?

## 6.3. Példa QR-felbontásra

Elkészítjük az

mátrixra a -felbontás nemnormált változatát. Induláskor és . A következő vektorhoz és

, ezt az eredményt előállíthatjuk a kapott vektorból, de úgy is számíthatjuk, hogy

észrevevesszük:

A harmadik vektor

előállításához és , ezekkel a harmadik vektor és a -felbontás:

## 10.7. Feladatok

1. Bizonyítsuk be, szimmetrikus mátrixokra a Rayleigh-hányados legkisebb értéke a legkisebb sajátérték.
2. Hogy hajtsuk végre a Jacobi-iterációt, ha a mátrix az oszlopai szerint szigorúan főátló-domináns?
3. Mutassuk meg, a 10.3.1 tétel átfogalmazható arra az esetre, amikor a mátrix oszlopai szerint szigorúan főátló-domináns.

Olyan a műveletek sorrendje, hogy értéke értékével felíírható. Így a tárgény: előnyösebb, mint a Jacobi-iterációnál. Célszerű kezdővektor:

### 10.3.1 Tétel. Felhasításból származó iterációs mátrix normájának becslése

Legyenek  $A$ -es valós mátrixok, diagonálmátrix:  $D$  és  $E$ -re. Ekkor fennáll:

ahol a maximum-keresésnél elegendő a nemzérus számlálókat tekinteni.

**Bizonyítás.** Mivel főátlódomináns, a kijelölt inverz létezik. A norma definíciója szerint  $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ . Legyen  $j_0$  és tegyük fel, a maximum  $\sum_{i=1}^n |a_{ij_0}|$ , ahonnan az  $j_0$ -edik sora  $\sum_{i=1}^n |a_{ij_0}|$ . Figyelembe véve, hogy  $|a_{j_0 j_0}| > \sum_{i \neq j_0} |a_{ij_0}|$ , innen átrendezéssel kapjuk az egyenlőtlenséget. Mivel nem tudjuk, melyik  $i$ -re valósul meg  $|a_{ij_0}|$ , ezért a törtet a sorok szerint maximalizáljuk. Ha  $i_0$ -edik sora zérus, akkor adódik, ami feltevéssünkkel ellentmondó nemzérus mellett, így ezeket a sorokat elhagyhatjuk. ■

### 10.3.2 Tétel

Ha sor szerint szigorúan domináns átlójú, akkor

$$(10.7)$$

**Bizonyítás.** Az előző tételben legyen  $A$ , és a mátrix főátlójából alkotott diagonálmátrix. Ezzel a választással közvetlenül adódik az első egyenlőtlenség.

A második egyenlőtlenség igazolásához vezessük be az

$$(10.8)$$

jelöléseket. Eszerint  $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$  és igazolandó, hogy ez nem nagyobb, mint  $\|A\|_1$ . Tegyük fel,  $\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ij_0}|$ . Ekkor  $\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ij_0}|$  -ből átrendezéssel, ahonnan következik. Ez éppen a szigorú főátló-dominancia feltétele, amit feltettünk. Egyenlőség csak akkor lehetséges, ha  $\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ij_0}|$ . Így

Ha balról az első maximummá  $\|A\|_1$ , akkor biztosan  $\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ij_0}|$ . ■

sajátértékeket helyben hagyja.

A mátrixot általában valósnak tekintjük. De mivel valós mátrixnak is lehetnek komplex sajátértékei és sajátvektorai, emiatt sokszor a komplex esetre is gondolni kell.

## 7.1. Néhány tulajdonság

Az alábbiakban felidézzük néhány a sajátértékfeladattal kapcsolatos ismeretet.

### 7.1.1 Legalább 1 saját pár létezése

Minden sajátértékhez tartozik legalább egy jobb- és baloldali sajátvektor.

Mert és  $v$  magtere legalább 1-dimenziós (ui. nemcsak a null-vektorból áll). ■

### 7.1.2 Lineáris függetlenség

Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Emnek a bizonyítása indirekt módon történhet. Feltesszük két különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorról, hogy lineárisan összefüggők. Ekkor ellentmondásra jutunk, mert két vektor úgy lehet lineárisan összefüggő, hogy egyirányúak, ekkor viszont nem lehetnek a sajátértékek különbözők. ■

### 7.1.3 Különböző sajátértékhez tartozó bal és jobb sajátvektorok ortogonalitása

Legyen  $v$  a sajátértékhez tartozó bal sajátvektor,  $w$  pedig a sajátértékhez tartozó jobb sajátvektor. Ekkor  $v^T w = 0$ .

**Bizonyítás.** Tekintsük a következő kifejezést:

másik esetben pedig a jobb sajátvektor tulajdonságot alkalmazzuk. Kapjuk, hogy ebből következik az állítás, mert  $v^T w = 0$ . ■

### 7.1.4 Következmény

Ha minden sajátérték különböző, akkor a sajátvektorokat egy mátrixba rendezve kapjuk:

$$(7.2)$$

A lineáris függetlenség miatt  $V$  és  $D$  invertálhatók, így  $V^{-1} A V = D$ , ahol a transzponált inverzét jelöltük  $V^{-T}$ -vel. Írhatjuk:  $V^{-1} A V = D$ , ahol  $V^{-1} A V$  egy nemszinguláris diagonálmátrix és szerepe csupán annyi, hogy az  $V$  vektorok hosszát skálázza. Tehát az általánosság megszorítása nélkül vehetjük:  $V^{-1} A V = D$ , a sajátvektorok saját-altereket adnak, a vektorok hossza tetszőleges. A kapott alak mutatja, hogy ekkor a mátrix *hasonlósági transzformációval diagonalizálható*.

### 7.1.5 Schur tétele

Minden mátrix unitér hasonlósági transzformációval felső háromszög alakra hozható.

**Bizonyítás.** Jelölje  $U$  a Householder tükröző mátrixot. Legyen  $U^T A U$  egy normált sajátvektor,  $\lambda$ , amelyet skálázzunk úgy, hogy az első eleme valós, nempozitív szám legyen. (Ezt



(9.6)

**Bizonyítás.** Vizsgáljuk az

skaláris szorzatot! Az eredmény zérus, ha

a 9.1.3 Következmény miatt. Nemzérus az eredmény, ha

így kifejthető a polinomokkal:

ahonnan  $-re$  rendezve kapjuk (9.6)-öt.**9.2.1 Tétel**

Az és kifejtési együtthatókra érvényes

(9.7)

(9.8)

**Bizonyítás.** Helyettesítsük értékét a rekurzióból. Az ortogonalitás miatt értéke rögtön adódik, ha a (9.6) rekurzió mindkét oldalán skaláris szorzatot képezünk -nel. értéke hasonlóan készül, csak most a skaláris szorzatot -gyel vesszük. Az átalakításban -et átvisszük -hez, és az 1-gyel kisebb indexű rekurziós összefüggést helyettesítjük:

■

**9.3. Legkisebb négyzetes közelítés ortogonális polinomokkal**A (9.2) skaláris szorzat mellett az induló polinomok, ha minden  $-re$ 

(9.9)

A következő polinomot  $-et$  keressük alakban! Ekkor az ortogonalitás miatt

ahonnan

(9.10)

így  $-t$  zérusnak vehetjük.

6. Döntsük el Gergorin tétele és diagonálmátrix hasonlósági transzformáció segítségével, hogy invertálható-e:

**7.3. A karakterisztikus polinom számítása**

Tekintsük az un. Frobenius-féle kísérő mátrixot:

(7.4)

Az utolsó oszlopa mentén kifejtve igazolható, hogy Eszerint a karakterisztikus polinom együtthatóinak előállításá könnyű, ha van valamilyen hasonlósági transzformáció, ami az mátrixot ilyen alakra hozza. Danyiljevskij ötlete szerint ez megvalósítható a Gauss-Jordan módszerrel megismert egyszerű transzformációs mátrixszal, ha a mátrix első oszlopát nem  $-be$ , hanem  $-be$  vesszük. Legyen tehát az első transzformációs mátrix

és ekkor a hasonlósági transzformáció eredményeként az első oszlop lesz:

Általában a  $-adik$  lépésben , és a korábbi oszlopvektorok sem romlanak el, mert az előbbihez hasonlóan kapjuk:

Egy transzformációs lépés végrehajthatóságának feltétele, hogy a diagonálem alatti elem legyen zérustól különböző. Ha nem így volna, sor-cserével mozgassunk egy átló alatti nemzérus elemet az átlóelem alá és hajtsuk végre a hasonló oszlopok cseréjét is a hasonlósági transzformáció megőrzésé végett. Az algoritmus  $-edik$  lépésében a (7.4) alakhoz jutunk.

Ha a mátrix háromatlóú, a karakterisztikus polinom egyszerű rekurzióval számolható. Például a

determináns rekurziója

(7.5)

ahol a bal felső  $-edrendű$  blokk determinánsa. Az  $-edrendű$  determináns az  $-edik$  oszlop szerinti kifejtéssel kapjuk és az eredmény a kapott rekurzió. A rekurzióval a polinom helyettesítési értékét is könnyen számolhatjuk.

A rekurziót meg lehet csinálni a felső Hessenberg-mátrix karakterisztikus polinomjára is. Legyen például és alutól felfelé oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

megoldása. Ha a rendszer inkonzisztens, akkor az a legkisebb négyzetes megoldás, melyre kettes normája minimális. Minden az esetben a minimális kettes normájú megoldás.

**Bizonyítás:** A 8.1.4 Tétel alapján a vektor  $\mathbf{v}$  -tól való távolsága. Továbbá vegyük észre, (8.5)-ben két ortogonális vektor van, mert az első vektort a pszeudoinverz tulajdonságok miatt helyben hagyja, a másodikat pedig zérusba viszi. Emiatt írhatjuk:

Ez akkor a legkisebb, ha  $\mathbf{v}$ , vagy  $\mathbf{v}$ . ■

#### 8.4. Feladatok

1. Legyen egy rang-faktorizáció. Ekkor írjuk fel azt a szimmetrikus vetítőmátrixot, amely  $\mathbf{P}$ -ba vetít.
2. Írjuk fel az  $\mathbf{A}$  mátrix null-terébe vetítő szimmetrikus projektort! Adjuk meg az  $\mathbf{A}$  vektor  $\mathbf{v}$  -tól való távolságát!
3. Egy egyenes áthalad az  $\mathbf{p}$  ponton. Adjuk meg az  $\mathbf{v}$  vektor és ez az egyenes távolságát!
4. Igazoljuk, hogyha a mátrix invertálható, akkor a pszeudoinverze megegyezik az inverzével.
5. Írjuk fel az  $\mathbf{A}$  -ba vetítő szimmetrikus projektort!
6. Két sík normálvektorát az 5. feladat sorvektorai adják. Melyik az a szimmetrikus projektor, amely a két sík közös részébe vetíti?
7.  $\mathbf{A}$  végpontja milyen távol van az előbbi két sík közös részétől?
8.  $\mathbf{A}$  mátrix  $\mathbf{A}$  sajátértékei  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  és a hozzá tartozó sajátvektorok  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ . Milyen távol van  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{v}_1$  sajátvektortól?
9. Az előbbi mátrixszal mi lesz  $\mathbf{A}$  pszeudoinverzes megoldása, ha  $\mathbf{v}$  ?
10. Igazoljuk, hogy  $\mathbf{A}$ , ha oszlopai lineárisan függetlenek.
11. A pszeudoinverz 4 tulajdonságából vezessük le:
  - a.  $\mathbf{A}^+ \mathbf{A} \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$
  - b.  $\mathbf{A} \mathbf{A}^+ \mathbf{A} = \mathbf{A}$
  - c.  $(\mathbf{A}^+)^T = (\mathbf{A}^T)^+$
  - d.  $\mathbf{A}^+ \mathbf{A}^T = (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^+$
12. Az  $\mathbf{A}$  mátrix közelítő sajátvektora  $\mathbf{v}$ . A hozzátartozó sajátértéket úgy szeretnénk közelíteni, hogy minimális legyen. Mi lesz ekkor kifejezése?

### 9. Ortogonális polinomok

Gyakran polinommal kell végezni a legkisebb négyzetes illesztést. Ilyenkor speciális módszert készíthetünk ortogonális polinomok segítségével. Később a numerikus integrálási módszereknél is szükségünk lesz az ortogonális polinomokra, így most röviden megismerkedünk velük.

#### 9.1. Függvények skalárszorzata.

Az  $f$  és  $g$  függvény skalárszorzatát a következő utasítással definiáljuk:

**Bizonyítás.** A módszer szerint képezzük az

$\mathbf{v}$  vektorokat és innen kapjuk  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  határátmenettel kapjuk az állítást, mivel a többi sajátvektor szorzója zérushoz tart. ■  
Látjuk, a konvergencia gyorsaságát esetén lényegében a hányados szabja meg. Az algoritmus:

A normának célszerű például a végtelen normát választani. A sajátérték a

kifejezéssel becsülhető. A hatványmódszerrel a spektrum (= a mátrix sajátértékeinek összessége) szelém lévő egyszeres sajátértékeket kereshetjük sikerrel. Az *inverz határérték* azonban kereshetjük a spektrum belsejében elhelyezkedő sajátértékeket is. Ekkor az iteráció egy lépésében az

vektort számítjuk. A mátrix sajátértékei  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , innen látható: ez is hatványiteráció, ami a  $\lambda$  paraméter értékéhez legközelebb eső sajátértékhez és a hozzátartozó sajátvektorhoz fog tartani.

A sajátprobléma megoldására az egyik legjobb módszer a  $\lambda$ -módszer. Ekkor elkészítjük az  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$  mátrix  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$  -felbontást és a következő mátrix  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$  inverzét, tehát egy ortogonális hasonlósági transzformáció eredménye. A  $k$ -edik lépésben  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$  megmutatható, hogy amennyiben a mátrix egyszerű struktúrájú és a sajátvektorok mátrixának van  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$  -felbontása, akkor a  $k$ -módszer egy felső háromszög mátrixhoz konvergál. A konvergencia még gyorsítható, ha a felbontásokat kombináljuk egy mátrixszal való elfoással is, ahol a sajátérték egy becsülése. Ekkor a  $k$ -módszer konvergencia-sebessége másodrendű, szimmetrikus mátrixoknál harmadrendű lesz.

#### 7.6. A sajátértékfeladattal kapcsolatos egyenlőtlenségek

A Gergorin-körök ismertetése során már megismerkedtünk ilyen összefüggésekkel. Itt folytatjuk a vizsgálatainkat. Arra vagyunk kíváncsiak, hogyha van egy közelítő sajátpárunk, mit mondhatunk a jóságának jellemzésére. Egy másik feladat, hogyha a mátrixelemeket kissé megváltoztatjuk (– perturbáljuk), hogyan változik meg a sajátpár?

A következő *jelöléseket* alkalmazzuk:  $\mathbf{A}$  és feltesszük, hogy a mátrix invertálható. Mindig indukált mátrixnormát használunk.

A spektrálsugár és az indukált normák összefüggéséből már ismerjük:  $\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|$ , a kettő közötti különbséget az alábbi összefüggés adja:

**Bizonyítás.** Mínthogy zárja be a legkisebb szöget  $\theta$ -szel, így a  $\theta$  irány mentén található az a pont  $P$ -ban, amely legközelebb van végpontjához. Keressük tehát azt a  $\theta$ -t, amelyre norma-négyszete

minimális. Deriválással kapjuk, hogy a minimum helye  $\theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$ -nél van. Tehát normája az  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  vektor altértől való távolsága. ■

### 8.3. Mátrixok általánosított inverze, a pszeudoinvert

Mátrixok általánosított inverzét akkor értelmezzük, ha az inverziók nem léteznek. A pszeudoinvert a lineáris egyenletrendszernek azt a megoldását adja, amelyre az eltérés vektor, más szóval reziduum, kettes normája minimális. Ha több megoldás is van, akkor a legkisebb kettes normájú megoldást szolgáltatja. Emlékeztetőül két kis lemma felidézésével kezdjük.

#### 8.3.1 Lemma.

Legyenek az  $A$  mátrix oszlopai lineárisan függetlenek. Akkor  $A$ -ból  $A^+$  következik.

**Bizonyítás.** Átrendezve  $A$  oszlopainak bármely lineáris kombinációja a lineáris függetlenség miatt csak akkor lesz zérusvektor, ha  $A$  oszlopvektorai zérusok. ■

#### 8.3.2 Lemma.

Legyen  $A$ . Ekkor pozitív szemidéfinit. Ha  $A$  oszlopai lineárisan függetlenek, azaz oszlopangú, akkor pozitív definit.

**Bizonyítás.** Legyen  $x$ , ekkor  $x^T A x$ . Ha  $A$  oszlopangú, az előző lemma alapján  $x^T A x > 0$   $x \neq 0$ -ből következik, így ez esetben pozitív definit. ■

#### 8.3.3 A pszeudoinvert

A továbbiakban megmutatjuk, hogy minden mátrixhoz létezik pszeudoinvert, vagy Moore-Penrose féle általánosított inverz, mely a közönséges inverzzel egyenlő, ha a mátrix nonszinguláris, egyéb esetben viszont minimális kettes norma tulajdonságokkal rendelkezik. Ezt a mátrix inverzet a következő tulajdonságok definiálják:

A definíció komplex mátrixokra vonatkozik, mi most valós esetben a hermitikus tulajdonság helyett a szimmetrikusságot követeljük meg. Vegyük észre: Ha az első egyenletet jobbról, vagy balról szorozzuk  $A$ -tel, az adódik, hogy  $A A^+ A = A$  és  $A^+ A A^+ = A^+$  projektorok és a 3. és 4. feltétel szerint még szimmetrikusak is. Az első feltétel alapján  $A A^+$ -ba vetít, az  $A^+ A$ -ba vetítő szimmetrikus projektor. látjuk, hogy  $A A^+ A = A$   $A^+ A A^+ = A^+$

Tegyük fel:  $A$ , ahol  $A$  és  $A^+$  közbülső mérete  $n$  és  $m$   $n \times m$  rang-faktorizáció ismeretében előállítjuk a pszeudoinvertet.

### 7.6.6 Tétel, (Bauer, Fike)

Legyen egyszerű szerkezetű és egy ugyanolyan méretű mátrix. Ha az sajátértéke és  $\lambda$ , akkor

(7.10)

**Bizonyítás.** Tegyük fel  $\lambda$ , mert különben igaz az állítás. Mivel sajátérték, következésképpen  $\lambda$  szinguláris, ahonnan átrendezéssel

adódik. Ez az utóbbi mátrix pedig csak akkor lehet szinguláris, ha  $\lambda = 0$ -nek van egy  $1$  abszolút értékű sajátértéke, amiből

rendezve kapjuk az állítást. ■

### 7.6.7 Tétel, inverz perturbáció

Legyen egy közelítő saját pár,  $(\lambda, v)$ . Ekkor az

Frobenius-norma) mátrixszal a saját pár az

egyenlet pontos megoldása.

**Bizonyítás.** ■

Például, ha  $A$ , a mátrix elemei  $1$  körüliek, akkor pontos megoldása egy mátrixnak, ami  $\lambda$ -tól csak a kilencedik jegyében különbözik. Ha  $\lambda$ -t csak 7 jegyre ismerjük, akkor nincs értelme tovább folytatni az iterációt.

### 7.6.8 Tétel, egyszeres sajátérték perturbációja

Legyen egy  $\lambda$ -hoz tartozó sajátérték, ahol egyszeres sajátérték. Az sajátértékének megváltozása első rendben

(7.12)

és

(7.13)

**Bizonyítás.** A második összefüggés az első következménye, ha normákra térünk át. Az első bizonyításához legyen a sajátérték megváltozása  $\delta$ , a sajátvektoré pedig  $\epsilon$ :

Feltesszük, hogy  $\delta$  esetén  $\epsilon$  és  $\delta$ . Beszorzás után a másodrendű tagokat hagyjuk el: