Bizonyítás. Az $N_n(x)-N_{n-1}(x)$ kifejezés eltűnik az $x_0,\ldots,x_{n-1}$ pontokban a definició szerint, így $\omega_{n-1}(x)$ szerepeltetése jogos, aminek az együtthatóját abból a feltételből határozzuk meg, hogy $N_n(x_n)=f(x_n)$. A levezetésben $N_{n-1}(x)$ helyére a megfelelő Lagrange-polinomot írjuk:

$$b_n=\frac{N_n(x_n)}{\omega_{n-1}(x_n)}-\frac{N_{n-1}(x_n)}{\omega_{n-1}(x_n)}=\frac{f(x_n)}{\omega_{n-1}(x_n)}-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f(x_j)\omega_{n-1}(x_n)}{\omega_{n-1}(x_n)(x_n-x_j)\omega'_{n-1}(x_j)}=$$
$$=\frac{f(x_n)}{\omega_{n-1}(x_n)}+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_n)\omega'_{n-1}(x_j)}=f[x_0,x_1,\ldots,x_n],$$

ahol az utolsó sorban figyelembe vettük (13.6)-ot. Eszerint az osztott differenciák táblázatában a jobb szélső elemek adják a kifejtéshez szükséges b_n együtthatókat. ■

A *rekurzív* jelző nélkül egyszerűen Newton-interpolációról beszélünk akkor, ha a felépítésben a b_n együtthatók helyén az osztott differencákat használjuk. A rekurzív Newton interpoláció használata szokatlan helyzetekben előnyös, például, ha többváltozós interpolációs formulát akarunk készíteni, vagy magasabb deriváltakat is interpolálunk úgy, hogy egyes alacsonyabb rendűek hiányoznak.

13.4. Feladatok

1. Részletesen ellenőrízzük a 3.3 Lemma bizonyításának lépéseit!
2. Neville-interpolációval a függvényt az x helyen kivánjuk közelíteni. A táblázat minden sorában az utolsó szám egy interpoláló polinom helyettesítési értékét adja. Milyen sorrendben írjuk fel az interpoláció alappontjait, hogy a táblázatban az utolsó elemek egyre jobb, növekvő pontosságú sorrendet adjanak?
3. Neville-interpolációval határozzuk meg azt a másodfokú polinomot, amely átmegy a $(-1,0),(1,1),(2,6)$ pontokon! (Most x paraméterként bennmarad a formulákban.)
4. Mutassuk meg, a Neville-interpoláció akkor is ugyanazt az eredményt adja, ha az első oszlopba $x-x_i$ helyett az x_i-x értékeket írjuk!
5. Ugyanezt a polinomot állítsuk elő Newton interpolációval!
6. Milyen algoritmust javasoljunk a Newton-polinom helyettesítési értékeinek számítására, ha az osztott differenciák adottak?
7. Készítsünk Matlab programot, amely a Neville-interpoláció függvényérték közelítéseit adja egy vektorban!
8. Készítsünk Matlab programot, amely az osztott differenciák táblázatát készíti el!
9. Készítsünk Matlab programot, amely az osztott differenciák értékeit felhasználva a Newton-polinom helyettesítési értékét adja!
10. Állapítsuk meg a Newton-interpoláció bázisfüggvényeit és ezek segítségével írjuk fel az interpolációs feltétel lineáris egyenletrendszerét!
11. Oldjuk meg az előző feladatban kapott egyenletrendszert úgy, hogy az osztott differencia-séma lépéseit követjük! Mit tapasztalunk?
12. Írjuk fel azt a mátrixot, ami az $[f_0,f_1,\ldots,f_n]^T$ függvényértékek vektorát az elsőrendű osztott differenciák $[f[x_0,x_1],\ldots,f[x_{n-1},x_n]]^T$ vektorába viszi!

14. Newton- és Hermite-interpoláció

14.1. Tétel, osztott differenciával az interpoláció hibája

Legyen $x\in[a,b],\ x\neq x_i,\ i=0,1,\ldots,n,$ ekkor

$$f(x)-L_n(x)=f[x,x_0,x_1,\ldots,x_n]\omega_n(x), \tag{14.1}$$

ahol $[a,b]$ az alappontok által kifeszített intervallum.

Bizonyítás. Legyen N_{n+1} olyan, hogy az x helyen felveszi $f(x)$ értékét. Felhasználva, hogy $N_n(x)=L_n(x)$, a Newton interpoláció szerint írhatjuk:

$$f(x)-L_n(x)=N_{n+1}(x)-N_n(x)=f[x,x_0,x_1,\ldots,x_n]\omega_n(x),$$

és ezzel kész is vagyunk, mert minden x-re N_{n+1}-et újraválaszthatjuk úgy, hogy $N_{n+1}(x)=f(x)$ teljesüljön. ■

14.1.1 Következmény

Legyen $f(x)\in C^{n+1}[a,b],\ x\in[a,b],\ x\neq x_i$, ekkor létezik $\xi_x\in[a,b]$, melyre

$$f[x,x_0,x_1,\ldots,x_n]=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \tag{14.2}$$

fennáll.

Ennek belátásához elegendő, ha összehasonlítjuk az 11.3.1 Tétel (11.9) formuláját (14.1)-gyel. Speciálisan $n=0$-ra $f[x,x_0]=f'(\xi_x)$, és ez kiírva a Lagrange középérték-tétel. Így (14.2) nem más, mint a középérték-tétel általánosítása magasabbrendű osztott differenciákra. Figyeljük meg: (14.2) –ben x is formális változóként szerepel, $n+2$ alapponthoz tartozik $n+1$-edrendű osztott differencia, és az ehhez tartozó derivált $n+1$-edrendű.

14.1.2 További következmény

A (14.2) összefüggés alkalmas arra, hogy az osztott differenciák táblázatát arra az esetre is értelmezzük, amikor egy alappont többször szerepel. Az alappontok ξ_x-szel együtt az $[a,b]$ intervallumban helyezkednek el. Ha most $[a,b]$ az x_0 pontra zsugorodik össze, akkor határátmenettel kapjuk, hogy

$$f[\underbrace{x_0,x_0,\ldots,x_0}_{n+1\text{ db. alappont}}]=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \tag{14.3}$$

14.2. Hermite-interpoláció

Ha előírjuk, hogy az interpoláló polinom a függvény deriváltjaira is illeszkedjen a megadott pontokban, akkor Hermite-interpolációról beszélünk. Ilyenkor a tartópontok közé a deriváltakat is felvesszük:

$$(x_k,f^{(i)}(x_k),\ i=0,1,\ldots,m_k-1),\ m_k\in\mathbb{N}_+ .$$

	$k=0$	1	2
$2-0=2$	1		
$2-1=1$	3	$\frac{1}{2-1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=5$	
$2-3=-1$	2	$\frac{1}{1-(-1)}\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=5/2$	$\frac{1}{2-(-1)}\begin{vmatrix}2 & 5\\ -1 & 5/2\end{vmatrix}=10/3$

Az Aitken-interpoláció filozófiája hasonló, csak más köztes polinomokat állít elő. A sorrendet az Aitken-interpoláció táblázatával szemléltetjük:

	$k=0$	1	2	3
$x-x_0$	$f_0=p_0(x)$			
$x-x_1$	$f_1=p_1(x)$	$p_{01}(x)$		
$x-x_2$	$f_2=p_2(x)$	$p_{02}(x)$	$p_{012}(x)$	
$x-x_3$	$f_3=p_3(x)$	$p_{03}(x)$	$p_{013}(x)$	$p_{0123}(x)$

13.2. Osztott differenciák

Mielőtt rátérnénk a Newton-interpolációra, bevezetjük az osztott differenciákat. Legyenek most is a tartópontok $\{(x_i, f_i=f(x_i)\}_{i=0}^{n}$, ekkor *elsőrendű osztott differenciák:*

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0},\quad f[x_i,x_{i+1}]=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}, \tag{13.3}$$

másodrendű oszott differenciák:

$$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]=\frac{f[x_{i+1},x_{i+2}]-f[x_i,x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i}, \tag{13.4}$$

és általában a k *-adrendű osztott differenciák:*

$$f[x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+k}]=\frac{f[x_{i+1},x_{i+2}\dots,x_{i+k}]-f[x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}, \tag{13.5}$$

ahol a k -adrendű osztott differencia $k+1$ pontra támaszkodik. Az osztott differenciáknak a következő táblázatát készíthetjük:

	$k=0$	1	2	3
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$

Példa. Készítsük el az osztott differenciák táblázatát, ha a tartópontok:

x_i	1/2	1	2	3
f_i	2	1	1/2	1/3

Abban a speciális esetben, ha minden alappontban a függvényérték és az első derivált adott, *Hermite-Fejér interpolációról* beszélünk.

Érdemes még szót ejteni arról, hogy a Newton-interpolációt hogyan alkalmazhatjuk az Hermite-interpolációnál. Az osztott differenciák értelmezését többszörös ugyanazon alappont esetére már (14.3)-ban megadtuk. Eszerint például kétszer adjuk meg az x_0 pontot, ha $f(x_0)$ és $f'(x_0)$ adottak. Az $\omega(x)$ szorzatfüggvénybe minden korábban alappontként figyelembe vett x_j pont $x-x_j$ tényezőt ad, az éppen interpolált pont csak a következő lépésben ad tényezőt. A pontok sorrendje tetszőleges, de a többször megadott pontok legyenek egymás mellett a deriváltak miatt. Ne feledjük, a deriváltak megadása nem lehet hiányos, például nem hiányozhat az első, ha adott a második derivált.

14.2.3 Példa

Newton interpolációval készítsük el azt a polinomot, amely az x_0, x_1 pontokra az Hermite-Fejér interpolációt valósítja meg!

Megoldás. A osztott differenciák táblázata:

	$k=0$	1	2	3
x_0	f_0			
x_0	f_0	f_0'		
x_1	f_1	$f[x_0,x_1]$	$(f[x_0,x_1]-f_0')/(x_1-x_0)$	
x_1	f_1	f_1'	$(f_1'-f[x_0,x_1])/(x_1-x_0)$	$(f_1'-2f[x_0,x_1]+f_0')/(x_1-x_0)^2$

A keresett polinom:

$$N_3(x)=f_0+f_0'(x-x_0)+\frac{f[x_0,x_1]-f_0'}{x_1-x_0}(x-x_0)^2+\frac{f_1'-2f[x_0,x_1]+f_0'}{(x_1-x_0)^2}(x-x_0)^2(x-x_1)\,.$$

14.3. Hermite-interpolációs alappolinomok

A Lagrange-alappolinomokhoz hasonló tulajdonságú polinomok mindig megszerkeszthetők, ha nem hiányos a deriváltak megadása. Az x_k pontban az $f_k^{(i)}$, $i=0,1,\dots,m_k-1$-edik deriváltak adottak. Vezessük be az x_k helyhez tartozó

$$h_k(x)=\prod_{j=0,\,j\neq k}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right)^{m_j},\quad h_k(x_k)=1$$

függvényt. Ennek a $0,1,\dots,m_j-1$-edik deriváltja eltűnik az $x_j(\neq x_k)$ pontokban, még akkor is, ha meg volna szorozva egy másik polinommal. Így $h_k(x)$ az $x_j(\neq x_k)$ pontokban már teljesíti az alappolinomtól elvárt tulajdonságokat. Az x_k ponthoz tartozó alappolinomokat keressük a következő alakban:

$$l_{k,i}(x)=p_{k,i}(x)h_k(x),\quad p_{k,i}(x)\in\mathcal{P}_{m_k-1}\,,$$

ahol $p_{k,i}(x)$ m_k-1-edfokú polinom, $i=0,1,\dots,m_k-1$, és az i -edik polinom együtthatóit abból a feltételből kapjuk, hogy $(d/dx)^j l_{k,i}(x_k)=\delta_{ij}$, $j=0,1,\dots,m_k-1$.

A könnyebb érthetőség kedvéért tekintsük azt a példát, amikor x_k -ban a második deriváltig adottak az értékek, azaz $i=0,1,2$ lehet. A polinomokat $x-x_k$ hatványai szerint célszerű felírni. Ha $i=0$, akkor polinom $n-1$-edfokú és a szélsőérték helyek közt előjelet kéne váltani, $n+1$ hely között összesen n-szer. De ez ellentmondás, mert $r(x)$-nek legalább n-ed-fokúnak kéne lennie. ■

A Csebisev polinomok gyökei. $\cos(n \arccos x_k) = 0 \to n \arccos x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi \to$

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0,1,\ldots,n-1 \text{ különböző hely.} \tag{12.7}$$

Következmény. $[-1,1]$-ben az alappontokat válasszuk úgy, hogy egybeessenek a Csebisev polinomok gyökeivel. Így érjük el a legkisebb hibakorlátot az $\omega_n(x)$ polinomnál:

$$|f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\|\omega_n\|_\infty = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\|\tilde{T}_{n+1}\|_\infty = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{2^n}. \tag{12.8}$$

Ha $x \in [a,b]$ akkor a gyökök egyszerű lineáris transzformációval $[-1,1]$-ből oda átvihetők.

12.6. Feladatok

1. Döntsük el, hogy az interpoláló polinom egyenletesen tart-e az alábbi függvényekhez, ha az $[a,b]$ intervallumot kifeszítő alappontok száma $n \to \infty$:

   a) $f(x) = \sin x, \quad x \in [0,\pi]$ *b*) $f(x) = \cos x, \quad x \in [0,\pi]$

2. *c*) $f(x) = e^x, \quad x \in [0,1]$ *d*) $f(x) = (x+2)^{-1}, \quad x \in [0,1]$

   e) $f(x) = (x+2)^{-1}, \quad x \in [-1,1]$

3. Az előző feladat *e*) példájánál mi a helyzet, ha az alappontoknak mindig a Csebisev polinomok gyökeit választjuk?
4. Állapítsuk meg azt az egyszerű lineáris transzformációt, amely a $t \in [-1,1]$ változót átviszi az $x \in [a,b]$ változóba! Mi lesz az inverz transzformáció?
5. Írjuk fel, $[a,b]$-ben mik legyenek az alappontok, hogy $\|\omega_n(x)\|_\infty$ minimális legyen!
6. (12.8) abban az esetben szolgáltatja a hiba becslését, amikor $x \in [-1,1]$. Vezessük le a hibabecslést arra az esetre, ha $x \in [a,b]$!
7. A $\sin x$ függvényt az $[0,\pi/2]$ intervallumban milyen sűrűn kell egyenletesen tabellázni, hogy lineáris interpolációt használva 10^{-4} hibával tudjuk mindenütt a függvény értékét számítani?
8. Az előző feladatnál hogy módosul az eredmény, ha másodfokú polinommal interpolálunk? Ekkor $\omega_2(x)$ maximális abszolút értékű helyét pontosan meg tudjuk határozni?
9. Mutassuk meg, hogy a (12.1) becslés továbbírható: $|\omega_n(x)| \le n!(K_n(b-a))^{n+1}/(4n^{n+1})$, ahol $1 \le K_n = hn/(b-a)$ állandó. Mikor lesz $K_n = 1$?
10. A Stirling-formula szerint $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \ldots\right)$. Az előző feladat segítségével mutassuk meg, hogy egyenletes felosztás mellett $|b-a| \le e$ esetén $\lim_{n\to\infty} \omega_n(x) \to 0$.
11. Igazoljuk, hogy a Csebisev polinomok ortogonálisak a $(T_i,T_j) = \int_{-1}^{1} \alpha(x)T_i(x)T_j(x)dx$ skaláris szorzat szerint, ahol a súlyfüggvény $\alpha(x) = (1-x^2)^{-1/2}$.
12. Adjuk meg (T_n,T_n) értékét!

8. Általánosítsuk a Neville-interpolációt Hermite-interpoláció esetére!
9. Legyen $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ n-edfokú polinom. $f[x_0,x_1,\ldots,x_n] = ?$
10. Igazoljuk: $\exists\, \xi \in [x_0,x_1]$: $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} x_0^j x_1^{n-j} = \xi^n$, ahol $n=1$-re ξ a számtani közép.

12. A polinom-interpoláció tulajdonságai

Természetesen adódik a kérdés: Pontosabb az interpoláció közelítése, ha növeljük a polinom fokszámát? Ekkor konvergál-e a polinom a függvényhez? A válasz nem mindig igenlő, de van eset, amikor az.

12.1. Tétel, egyenletes konvergencia

Legyen $f \in C^{\infty}[a,b]$ és legyen $x_k^{(n)}$, $k=0,1,\ldots,n;\ n=0,1,2,\ldots$ az $[a,b]$ intervallumot kifeszítő alappontrendszerek egy sorozata. Jelölje $L_n(x)$ az $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ alappontrendszerre illesztett Lagrange interpolációs polinomot, $n = 0,1,2,\ldots$ Ha $\exists M > 0$ úgy, hogy $M_n \le M^n$ $\forall n$-re, akkor az L_n interpolációs polinomok sorozata egyenletesen konvergál az $f(x)$ függvényhez.

Bizonyítás. Alkalmazzuk az egész intervallumra érvényes hibakorlátot, majd becsüljük felülről az $\|\omega_n\|_\infty$ normát:

$$|f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\|\omega_n\|_\infty \le \frac{M^{n+1}(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{[M(b-a)]^{n+1}}{(n+1)!}.$$

A nevezőben lévő faktoriális függvény a hatványfüggvénynél gyorsabban tart ∞-hez, emiatt a jobb oldal zérushoz tart, így igaz az egyenletes konvergencia:

$$\|f - L_n\|_\infty \to 0,$$

ami azt jelenti, hogy a két függvény maximális abszolút eltérése zérushoz tart. ■

12.2. Lemma

Rendezzük nagyság szerint az alappontokat: $x_{k-1} < x_k$ és legyen $h = \max\limits_{k=1,2,\ldots,n} |x_k - x_{k-1}|$. Ekkor $|\omega_n(x)|$-re a következő becslés adható:

$$|\omega_n(x)| \le \frac{n!}{4} h^{n+1}, \quad x \in [a,b]. \tag{12.1}$$

Bizonyítás. Átvizsgáljuk az egyes intervallumokat. Először legyen $x \in [x_0, x_1]$. Ekkor deriválva és x értékét a maximum helyen véve kapjuk: $|(x-x_0)(x-x_1)| \le h^2/4$. Tovább felhasználva adódik:

$$|\omega_n(x)| \le (h^2/4)(2h)(3h)\ldots(nh) = \frac{h^{n+1}n!}{4}.$$

Másodszor legyen $x \in [x_1, x_2]$. Hasonlóan kapjuk:

$$|\omega_n(x)| \le (2h)(h^2/4)(2h)\ldots((n-1)h) < \frac{h^{n+1}n!}{4}.$$

A többi belső intervallumra is azt kapjuk, hogy kisebb a becslés eredménye, mint az első intervallumra. Végül az utolsó intervallumra az elsőével azonos becslésre jutunk, így (12.1) a végső eredmény. ■

Megjegyzés. Az itt látott becslés alapján kisebb hibára számítunk, ha x az $[a,b]$ intervallum közepén van, mint amikor az $[a,b]$ intervallum széleinél volna. Ez akkor igaz, ha az alappontok közel

15.2. Elsőfokú spline-ok: $s(x) \in S_1(\Theta_n)$

$$s(x) = f_{i-1}\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + f_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \tag{15.1}$$

Az eredmény egy törtvonal. A számítógép nagyon gyakran így rajzolja ki a Θ_n halmazzal adott függvényt. Ha a felbontás elég sűrű, akkor nem annyira szembetűnő a vonalak törése. A kalapfüggvények segítségével ez az $s(x)$ függvény Lagrange alappolinom stílusban így írható:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i u_i(x) \tag{15.2}$$

15.3. Másodfokú spline-ok: $s(x) \in S_2(\Theta_n)$

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a kezdőpontban adott $f(a)$ és $f'(a)$. Ekkor az

$x_0 = a$	x_0	x_1
$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$f(x_1)$

pontokra készíthetünk Hermite-interpolációval egy másodfokú polinomot, amely az első intervallumhoz tartozik. E polinom x_1-ben felvett deriváltjával és $f(x_1)$-gyel folytassuk az eljárást ugyanígy az $[x_1, x_2]$ intervallumra. Általánosan $[x_i, x_{i+1}]$-ben a Newton interpoláció segítségével készített polinom táblázata:

$$\begin{array}{llll} x_i & f(x_i) & & \\ x_i & f(x_i) & f'(x_i) & \\ x_{i+1} & f(x_{i+1}) & f[x_i, x_{i+1}] & \dfrac{f[x_i, x_{i+1}] - f'(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \end{array}$$

és

$$s(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + f[x_i, x_i, x_{i+1}](x - x_i)^2, \quad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

ahol a függvény deriváltját mindig az előző intervallumban készített polinomból kapjuk.

Ha az induló derivált nem ismert, az első intervallum polinomját vehetjük lineárisnak. Egy másik lehetőség az első három ponton átvetett parabola deiváltjával közelíteni a függvény deriváltját az x_0 pontban, majd onnan az eljárást a megismert módon folytatni.

15.4. Harmadfokú spline-ok: $s(x) \in S_3(\Theta_n)$

Most az interpolációt egy az $[x_0, x_1]$ intervallumban készítendő hiányos Hermite-interpolációval kezdjük.

Az $\{x_0, f_0, f_0''\}$, $\{x_1, f_1, f_1''\}$ tartópontokhoz tartozó harmadfokú Hermite-interpolációs alappolinomokat jelölje $l_{ki}(x)$. Az első index az abszcissza indexére utal, a második pedig a derivált rendjére. Az első polinomra teljesül: $l_{00}(x_0) = 1$, $l_{00}(x_1) = 0$, $l_{00}''(x_0) = 0$ és $l_{00}''(x_1) = 0$. A második derivált első vagy alacsonyabb fokú és mindkét pontban eltűnik, emiatt csak az azonosan 0 függvény lehet. Következésképp $l_{00}(x)$ elsőfokú és az x_0 és x_1 helyen felvett értékei teljesen meghatározzák:

$$\omega_n(x)=\prod_{j=0}^{n}(x-x_j). \tag{11.5}$$

Ez $n+1$-edfokú és az alappontokon eltűnik. Segítségével könnyen bevezethetünk egy olyan n-edfokú Lagrange-alappolinomot, amely minden alappontban zérust ad, egyet kivéve, - legyen ez az i-edik, és e helyen az értéke legyen 1:

$$l_i(x)=\frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\prod\limits_{j=0,\,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)}=\frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega_n'(x_i)}=\prod_{j=0,\,j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j} \tag{11.6}$$

Itt az $(x-x_i)$ tényezővel azért osztottunk, hogy az (1.5) szorzatból kihagyjuk, és a produktum a nevezőben azért szerepel, hogy $l_i(x_i)=1$ legyen. Ha most (1.1)-ben $\varphi_i(x)=l_i(x)$, akkor az interpolációs feladat együtthatómátrixa az E egységmátrix, mert $l_i(x_j)=\delta_{ij}$ - ahol δ_{ij} a Kronecker delta. Innen adódik:

$$a_i=f(x_i), \tag{11.7}$$

és a Lagrange-interpoláció polinomja:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)l_i(x). \tag{11.8}$$

Ekkor a Lagrange-alappolinomok tulajdonsága alapján $L_n(x_i)=f(x_i)$.

11.3.1 Tétel. Az interpoláció hibája.

Legyen az interpolált függvény legalább $n+1$-szer differenciálható az $[a,b]$ intervallumon: $f(x)\in C^{n+1}[a,b]$, ahol az alappontok az $[a,b]$-ben vannak . Akkor $\forall x\in[a,b]$ esetén $\exists\xi_x\in[a,b]$, melyre

$$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_n(x), \tag{11.9}$$

továbbá

$$\left|f(x)-L_n(x)\right|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\omega_n(x)\right|, \tag{11.10}$$

ahol $M_k\le\left\|f^{(k)}\right\|_\infty=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(k)}(x)\right|$.

Bizonyítás. Ha $x\in\Omega_n$, akkor (1.9) mindkét oldala zérus és az egyenlőség fennáll. A továbbiakban tegyük fel, $x\notin\Omega_n$ és vezessük be a

$$g_x(z)=f(z)-L_n(z)-\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(x)}(f(x)-L_n(x)),\quad z\in[a,b] \tag{11.11}$$

függvényt. Szintén teljesül $g_x(z)\in C^{n+1}[a,b]$ és $g_x(z)=0,\ z\in\Omega_n$, de ezen felül $z=x$ is zérushely, így összesen $n+2$ db zérus van. A zérushelyek között többszörösen alkalmazva a Rolle-tételt, az $(n+1)$-edik deriválás után kapjuk: $\exists\xi_x\in[a,b]$, amelyre

$$g_x^{(n+1)}(\xi_x)=0=f^{(n+1)}(\xi_x)-0-\frac{(n+1)!}{\omega_n(x)}(f(x)-L_n(x))$$

$$\frac{f_i}{h_{i-1}}+\frac{s_i\,h_{i-1}}{3}-\frac{f_{i-1}}{h_{i-1}}+\frac{s_{i-1}h_{i-1}}{6}=-\frac{f_i}{h_i}-\frac{s_i\,h_i}{3}+\frac{f_{i+1}}{h_i}-\frac{s_{i+1}h_i}{6},\quad h_i=x_{i+1}-x_i.$$

Ez tovább rendezve

$$\frac{s_{i-1}h_{i-1}}{6}+\frac{s_i\,(h_{i-1}+h_i)}{3}+\frac{s_{i+1}h_i}{6}=f[x_i,x_{i+1}]-f[x_{i-1},x_i],$$

majd a $\sigma_{i-1}=h_{i-1}/(h_{i-1}+h_i)$ jelölés bevezetésével az

$$s_{i-1}\sigma_{i-1}+2s_i+s_{i+1}(1-\sigma_{i-1})=6f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}],\quad i=1,2,\ldots,n-1. \tag{15.8}$$

alakra egyszerűsödik.

A rendszer mátrixa diagonáldomináns, ez a megoldás szempontjából kedvező. Azonban az egyenletrendszer nem határozza meg s_0 és s_n értékét, így a kezdő- és végpontban még feltételeket kell előírnunk. A gyakorlatban az alábbi három megoldás valamelyikét szokták választani:

1. Hermite-peremfeltétel: az első deriváltak $f'(a)$ és $f'(b)$ adottak.
2. A második derivált értékéről rendelkezünk a kezdő és végpontban. Ha nem ismerjük, $s_0=s_n=0$ egy lehetséges választás. Hagyományosan ezt nevezik természetes spline-nak. Ennél azonban jobb megoldás, ha a szélső két intervallumban a harmadik deriváltat konstansnak vesszük: az így kapott s_0 és s_n-et tartalmazó kifejezéseket hozzávéve az (15.8) rendszerhez kapjuk azt a spline-interpolációt, amely harmadfokú polinomig pontos.
3. Periodikus határfeltétel. Ha a függvény periodikus, és a teljes periódusban történik az interpoláció, akkor a függvényt és deriváltjait a két végpontban egyenlővé tesszük.

15.5. Példa

Az Hermite-féle peremfeltétel mellett hogy fog kinézni a megoldandó (15.8) egyenletrendszer első és utolsó sora?

Megoldás. (15.8)-ban vegyünk $i=0$-t és az x_{-1} formálisan felvett alapponttal tartsunk x_0-hoz. Ekkor $\sigma_{-1}\to 0$ és így

$$2s_0+s_1=6f[x_0,x_0,x_1]. \tag{15.9}$$

Az utolsó egyenlethez helyettesítsük (15.8)-ba $i=n$-et és x_{n+1} tartson x_n-hez:

$$s_{n-1}+2s_n=6f[x_{n-1},x_n,x_n], \tag{15.10}$$

E két egyenlettel kiegészítve (15.8)-at már annyi egyenletünk van, mint az ismeretlenek száma.

15.6. Feladatok

1. Hogy egyszerűsödik (15.8), ha az alappontok egyenlő távolságra vannak egymástól?
2. Hogy módosul (15.8) első és utolsó sora, ha a szélső két intervallumban a harmadik deriváltat tesszük állandóvá? (Útmutatás: pl. az x_0,x_1 és x_1,x_2 pontok között képezzük differencia-hányadossal a harmadik deriváltakat és tegyük őket egyenlővé: $(s_2-s_1)/h_1=(s_1-s_0)/h_0$. Az utolsó három pontnál járjunk el hasonlóan. A kapott eredményt helyettesítsük a megfelelő egyenletbe.)
3. Mutassuk meg, hogy legalább négy tartópontnál az előbbi módon készített spline harmadfokú polinomra pontos, azaz annak pontjaiból visszakapjuk magát a polinomot.