4. A harmadfokú dongafüggvényt úgy is reprezentálhatjuk, hogy egy intervallumon belül a polinomot az intervallum határain felvett függvényértékkel és az első deriválttal adjuk meg. Az Hermite-interpolációs alappolinomokkal készítsük el az interpoláló formulát az $(x_0, x_1)$ intervallumra, ld. 14.5.5 példa. Igazoljuk, hogy (15.6)-hoz hasonlóan a következő formula nyerhető:

$$\tilde{p}_{[a,b],3}(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i\left(-2u_i^3(x) + 3u_i^2(x)\right) + f_i' \frac{u_i^3(x) - u_i^2(x)}{u_i'(x)}, \quad x \in [a,b].$$

5. Ha a harmadfokú dongafüggvényt a részintervallumok határain felvett függvényértékkel és az első deriválttal reprezentáljuk, akkor az előző feladat alapján a következő kifejezést kapjuk:

$$s_3(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i\left(-2u_i^3(x) + 3u_i^2(x)\right) + t_i \frac{u_i^3(x) - u_i^2(x)}{u_i'(x)}, \quad x \in [a,b],$$

ahol $f_i = s_i(x_i)$, $t_i = s_i'(x_i)$ és $u_i(x)$ az $i$-edik kalapfüggvény. A részintervallumok határain a második derivált egyeztetésével származtassunk egyenletrendszert a $t_i$ paraméterek meghatározására!

6. Szeretnénk harmadfokú spline függvénnyel közelíteni a következő differenciálegyenlet megoldását: $-v''(x) = g(x)$, $x \in [0,1]$, $v(0) = v(1) = 0$, ahol $g(x)$ megadott függvény. Osszuk fel a $[0,1]$ intervallumot $n$ egyenlő részre és írjuk fel (15.8) felhasználásával a közelítést meghatározó egyenleteket. A differenciálegyenletből nyerhető információ alapján alakítsuk át az egyenletrendszert, hogy megoldásul a $v(x_i)$, $i = 1, \ldots, n-1$ értékek közelítéseit kapjuk!

7. Az interpolációnál tanultak alapján adjunk felső becslést az elsőfokú spline közelítés hibájára!



# 11. A Lagrange interpoláció és hibája

Az interpoláció a függvény közelítések olyan módja, ahol azt írjuk elő, hogy az interpoláló függvény a közelíteni kívánt függvény értékét vegye fel a megadott helyeken. Az interpoláció alappontjait gyűjtsük az $\Omega_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ halmazba, ahol az $x_i$-k nem szükségképpen rendezettek. A tulajdonságokat az $[a,b]$ intervallumban fogjuk vizsgálni. Sokszor $[a,b] = [\min_i x_i, \max_i x_i]$, de az is lehetséges, hogy minden alappont $[a,b]$ belső pontja.

## *11.1. Interpoláló függvény lineáris paraméterekkel*

Legyen $n \in \mathbb{N}$, és tegyük fel, az $x_k \in \mathbb{R}$, $k = 0,1,\ldots,n$ pontokban ismerjük az $f(x)$ függvény értékeit. Az interpoláció alkalmával eljárhatunk úgy, hogy felveszünk egy

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x) \tag{11.1}$$

alakú próbafüggvényt, ahol az $a_i$ paraméterek meghatározandók az

$$f(x_i) = \Phi(x_i), \quad i = 0,\ldots,n \tag{11.2}$$

feltételekből. Az (1.1)-ben szereplő $\varphi_i(x)$ függvények lehetnek például hatványfüggvények, $\varphi_i(x) = x^i$, amivel interpolációs polinomhoz jutunk, de választhatunk más függvényeket: $\varphi_i(x) = \sin(i\omega x)$, $\varphi_i(x) = \cos(i\omega x)$, $\varphi_i(x) = \exp(i\omega x)$. Ha $n = 2$, az (1.2) interpolációs feladat a következő lineáris egyenletrendszerre vezet:

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) \\ \varphi_0(x_2) & \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{pmatrix}. \tag{11.3}$$

Látjuk tehát, hogyha a függvények lineáris kombinációját vesszük, akkor az interpolációs feladat lineáris egyenletrendszerre vezet. A feladat egyértelműen megoldható, ha a kapott rendszer együtthatómátrixának van inverze.

## *11.2. Polinom-interpoláció*

Ekkor a $\varphi_i(x) = x^i$ választással az (1.2) rendszerben az együtthatómátrix Vandermonde mátrix,

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \tag{11.4}$$

amiről tudjuk, hogy determinánsa nemzérus, ha az $x_i$ alappontok különbözők. Következik, hogy az egyváltozós polinom-interpoláció feladata különböző alappontokra egyértelműen megoldható.

## *11.3. Interpoláció Lagrange-alappolinomokkal*

Az $\Omega_n$-ben szereplő alappontokhoz rendeljük a kövekező polinomot:

$$l_{00}(x) = (x_1 - x)/(x_1 - x_0) = u_0(x), \quad x \in [x_0, x_1]. \tag{15.3}$$

Az $l_{02}(x)$ polinomot meghatározó összefüggések: $l_{02}(x_0) = 0,\ \ l_{02}(x_1) = 0,\ \ l''_{02}(x_0) = 1$ és $l''_{02}(x_1) = 0$. A második derivált elsőfokú és a felvett értékei alapján $l''_{02}(x) = u_0(x),\ x \in [x_0, x_1]$. Ezt kétszer integrálva

$$l'_{02}(x) = \frac{u_0^2(x)}{2u'_0(x)} + \beta,$$

$$l_{02}(x) = \frac{u_0^3(x)}{6u_0'^2(x)} + \beta\frac{u_0(x)}{u'_0(x)} + \gamma, \quad x \in [x_0, x_1]$$

ahol kihasználtuk, hogy $u'_0(x)$ az intervallumban konstans. Mivel $u_0(x_1) = 0$, emiatt $l_{02}(x_1) = 0$-ból $\gamma = 0$ következik. Az $l_{02}(x_0) = 0$ feltételből pedig $\beta = -1/(6u'_0(x))$ adódik, így

$$l_{02}(x) = \frac{u_0^3(x) - u_0(x)}{6u_0'^2(x)}. \tag{15.4}$$

Az $l_{10}(x)$ és $l_{12}(x)$ polinomok meghatározása teljesen hasonlóan történik, az eredmény:

$$l_{10}(x) = u_1(x), \quad l_{12}(x) = \frac{u_1^3(x) - u_1(x)}{6u_1'^2(x)}, \quad x \in [x_0, x_1]. \tag{15.5}$$

Az $[x_0, x_1]$ intervallumban interpoláló harmadfokú polinom ezekkel:

$$p_{0,3}(x) = f_0 l_{00}(x) + f''_0 l_{02}(x) + f_1 l_{10}(x) + f''_1 l_{12}(x) =$$

$$= f_0 u_0(x) + f''_0\frac{u_0^3(x) - u_0(x)}{6u_0'^2(x)} + f_1 u_1(x) + f''_1\frac{u_1^3(x) - u_1(x)}{6u_1'^2(x)}.$$

Most tegyük fel, a függvényérték és a második derivált az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ alappontokban adott. Akkor e formula mintájára minden intervallumban fel tudunk írni egy harmadfokú interpoláló polinomot:

$$p_{i,3}(x) = f_i u_i(x) + f''_i\frac{u_i^3(x) - u_i(x)}{6u_i'^2(x)} + f_{i+1}u_{i+1}(x) + f''_{i+1}\frac{u_{i+1}^3(x) - u_{i+1}(x)}{6u_{i+1}'^2(x)}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

de a kalapfüggvények definícióját szem előtt tartva ezt a polinom-sereget egy szummával is megadhatjuk a teljes intervallumra:

$$p_{[a,b],3}(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i u_i(x) + f''_i\frac{u_i^3(x) - u_i(x)}{6u_i'^2(x)}, \quad x \in [a,b]. \tag{15.6}$$

Ezzel olyan függvényünk van, amely minden részintervallumban harmadfokú polinom, az intervallum-határokon pedig folytonos a függvényérték és a második derivált.

A $\Theta_n$ tartópontokra a harmadfokú dongafüggvényt a következőképp vesszük fel:

$$s_3(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i u_i(x) + s_i\frac{u_i^3(x) - u_i(x)}{6u_i'^2(x)}, \quad x \in [a,b], \quad s_i = s''_3(x_i), \tag{15.7}$$

ahol az alappontokban a dongafüggvény $s_i$ második deriváltjait abból a feltételből határozzuk meg, hogy az első deriváltjai legyenek folytonosak az intervallumok határán. A meghatározó egyenletek felírásához nem kell mást tennünk, mint az első derivált jobb és bal oldali határértékét egyenlővé tenni. Az alábbi egyenletben a bal oldalon az alsó határérték, jobb oldalon pedig a felső határérték van felírva az $x_i$ pontban:



és innen rendezéssel kapjuk (1.9)-et. A második állítás úgy adódik, hogy mindkét oladolon vesszük az abszolút értéket és az $(n+1)$-edik deriváltat felülről becsüljük az $[a,b]$ intervallumban. ■

*Megjegyzés.* Rolle tétele szerint, ha $f(a) = f(b) = 0$ és $[a,b]$-ben $f$ deriválható, akkor $[a,b]$-ben van egy olyan pont, ahol a függvény deriváltja zérus. E tétel egyszerű következménye a Lagrange középérték-tételnek és akkor is igaz, ha $f(a) = f(b)$. Hasonlóan (1.10)-hez, az $(n+1)$-edik derivált abszolút érték minimumával az alsó becslés is elkészíthető.

### *11.4. Példa*

Az $\Omega_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ alappontokon adott $y_i$ értékek egy $n$-edfokú $p_n(x)$ polinom értékei. Mutassuk meg, hogy ezen pontokra készített $L_n(x)$ interpolációs polinomra $L_n(x) = p_n(x)$.

*Megoldás.* Vizsgáljuk meg az interpoláció hibáját:

$$p_n(x) - L_n(x) = \frac{p_n^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_n(x) = 0,$$

mert az $n$-edfokú polinom $(n+1)$-edik deriváltja mindenütt zérus.

### *11.5. Feladatok*

1. Egy függvény 3 pontban adott: (-1,-1), (1,1), (2,3). Készítsük el a Lagrange-alappolinomokat és azt az $L_2(x)$ polinomot, mely áthalad e pontokon.

2. Az $f(x) = (x+1)^{-2}$ függvényt a [0,1] intervallumban interpoláljuk az $\Omega = \{0, 0.2, \ 0.5, 0.8, 1\}$ alappontokon. Becsüljük meg az $|f(x) - L_4(x)|$ hibát az $x = 0.4$ helyen!

3. Lássuk be: $\sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) = x^k$, ha $k \le n$.

4. Igazoljuk: $x^{n+1} - \sum_{j=0}^{n} x_j^{n+1} l_n(x) = \omega_n(x)$.

# 15. Interpoláció spline (donga-) függvényekkel

## 15.1. Spline- vagy dongafüggvények

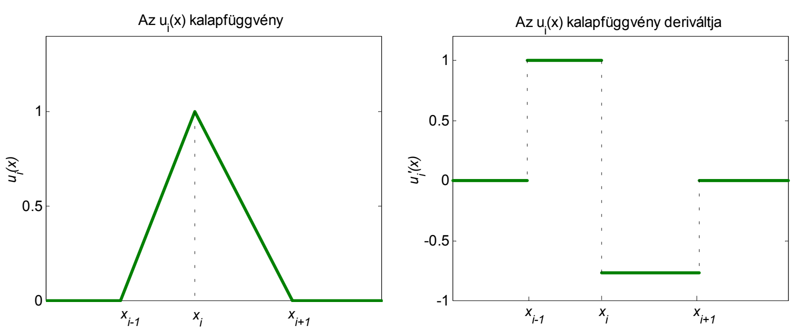
Ha az interpoláló polinomok fokszámát növeljük, gyakran tapasztalhatjuk, hogy a magasabb fokszámú polinomok erőteljes hullámzást mutatnak az alappontok környezetében. Olyannyira, hogy ránézésre sem hihető, hogy a függvényt jól közelítik.

A *spline* függvényekkel történő interpolációnál az ötlet az, hogy az egyes részintervallumokban csak alacsony fokszámú polinomokat engedünk meg, az intervallum-határokon pedig a polinomokat folytonosan illesztjük. Lehetőség szerint a folytonosságot a deriváltakra is előírjuk.

Spline [ejtsd: ‘szplájn’] angolul dongát jelent, ami azokat a fabordákat jelenti, amikkel a kádár kirakja a hordó alakját. Spline-oknak hívják angol nyelvterületen azokat a hajlítható, görbíthető ‘vonalzókat’ is, amelyekkel görbe vonal rajzolható.

Itt most matematikailag hasonló dolog történik: az egyes részintervallumokban függvényíveket polinomokból készítünk, amelyeket „összevarrunk” az intervallum-határokon valamilyen folytonossági követelmény szerint. Szemléletesen szólva: *dongafüggvényeket* alkalmazunk.

A továbbiakban legyenek $\Theta_n = \{x_i, f_i = f(x_i)\}_{i=0}^{n}$ a tartópontok, az abszcisszák legyenek nagyság szerint rendezettek: $x_{i-1} < x_i$, $0 < i$ és $S_l(\Theta_n)$ jelölje az $l$-edfokú spline-ok halmazát. Ez azt jelenti, hogy $S_l(\Theta_n)$ elemei minden $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumon $l$-edfokú polinomok. A spline interpoláció egyszerűen tárgyalható az $u_i(x)$ *kalapfüggvények* segítségével:




1. ábra. A kalapfüggvény és deriváltja

$$u_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & \text{ha } x_{i-1} \le x \le x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & \text{ha } x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \qquad u_i'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x_i - x_{i-1}}, & \text{ha } x_{i-1} < x < x_i \\ \dfrac{-1}{x_{i+1} - x_i}, & \text{ha } x_i < x < x_{i+1} \\ 0, & \text{ha } x < x_{i-1},\ x_{i+1} < x \end{cases}$$

Az első derivált az alappontokban nem létezik, csak az alsó és felső határértékük. Később ennyi számunkra elég lesz. A kalapfüggvény magasabbrendű deriváltjai mind eltűnnek.



egyenletesen helyezkednek el. Sejthető, jobb lesz a közelítés, ha az alappontok az intervallum széleinél sűrűbben helyezkednek el.

A megismert lemma segítségével az egész intervallumra érvényes hibakorláthoz jutunk:

## 12.3. Tétel

Az alappontok legyenek nagyság szerint rendezettek: $x_{k-1} < x_k$, ahol $h = \max\limits_{k=1,2,\dots,n} |x_k - x_{k-1}|$. Ekkor fennáll

$$|f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{4(n+1)} h^{n+1}, \quad x \in [a,b]. \tag{12.2}$$

*Bizonyítás.* (12.1)-et beírva a hibatételbe kapjuk az állítást. ■

## 12.4. Az alappontok ügyes megválasztása, Csebisev polinomok

Az $n$-edfokú Csebisev polinom a következő összefüggéssel adható meg:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1,1], \quad n = 0,1,\dots \tag{12.3}$$

Belátjuk, hogy ez polinom. Legyen $\vartheta = \arccos x$, ekkor

$$\begin{aligned} T_{n\pm1}(x) &= \cos((n \pm 1)\vartheta) = \cos(n\vartheta \pm \vartheta) = \\ &= \cos(n\vartheta)\cos\vartheta \mp \sin(n\vartheta)\sin(\vartheta) = xT_n(x) \mp \sin(n\vartheta)\sin\vartheta. \end{aligned}$$

A + és − előjelekhez tartozó kifejezéseket összeadva:

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x), \tag{12.4}$$

azaz a Csebisev polinomok előállítására a következő rekurziót kapjuk:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad x \in [-1,1]. \tag{12.5}$$

Ha az első néhány polinomot kiírjuk, azt találjuk, hogy $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots$, $n > 0$. Így vezessük be az 1-főegyütthatós Csebisev polinomokat a

$$\tilde{T}_n(x) = 2^{1-n} T_n(x), \quad 0 < n$$

utasítással. Ekkor igaz a következő tétel:

## 12.5. Tétel

$\|\tilde{T}_n\|_\infty \le \|p\|_\infty$, $p \in \mathcal{P}_n^1[-1,1]$, azaz szavakban: Jelölje $\mathcal{P}_n^1[-1,1]$ az 1-főegyütthatós $n$-edfokú polinomokat $[-1,1]$-ben, akkor e polinomok között az 1-re normált Csebisev polinom lesz az, amelyik a $[-1,1]$ intervallumban a legkisebb maximális értéket veszi fel, azaz ott legjobban közelíti a 0 függvényt.

*Bizonyítás.* A $T_n(x)$ polinomok a cos függvénynek megfelelően -1 és 1 között oszcillálnak. A szélsőérték helyek:

$$\cos(n \arccos z_k) = (-1)^k, \text{ ahonnan } z_k = \cos\frac{k\pi}{n}, \quad k = 0,1,\dots n, \tag{12.6}$$

$n+1$ különböző pont. Az 1-re normált polinomok szélsőérték helyei ugyanitt vannak. Most indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists p \in \mathcal{P}_n^1[-1,1]$, amelyre $\|p\|_\infty < \|\tilde{T}_n\|_\infty$. De ekkor az $r = \tilde{T}_n - p$ különbség

$p_{k,0}(x)=1+\alpha_1(x-x_k)+\alpha_2(x-x_k)^2$ alakú, mert $h_k(x_k)=1$ és $l_{k,0}(x_k)=1$ miatt $p_{k,0}(x_k)=1$. $\alpha_1$ -et abból a feltételből határozzuk meg, hogy az első derivált zérus az $x_k$ helyen:

$$[\alpha_1+2\alpha_2(x-x_k)]h_k(x)+p_{k,0}(x)h_k'(x)\Big|_{x=x_k}=0,$$

innen $\alpha_1=-h_k'(x_k)$. Ha a második deriváltat is zérussá tesszük:

$$2\alpha_2 h_k(x_k)+2\alpha_1 h_k'(x_k)+h_k''(x_k)=0\,,$$

$\alpha_1$ értékét beírva $\alpha_2=\left(h_k'(x_k)\right)^2-h_k''(x_k)/2$ az eredmény.

A $p_{k,2}(x)$ polinom nulladfokú tagja zérus, mert $p_{k,2}(x_k)h_k(x_k)=0$. Hasonló ok miatt az elsőfokú tag együtthatója is zérus lesz, mert $p_{k,2}'(x_k)h_k(x_k)+p_{k,2}(x_k)h_k'(x_k)=0$. Végül $l_{k,2}''(x_k)=1$ -ből $p_{k,2}(x)=(x-x_k)^2/2$ adódik. Gyakorlásképp igazoljuk, hogy a fenti példában $p_{k,1}(x)=(x-x_k)+\alpha_1(x-x_k)^2$!

Így a nem-hiányos Hermite-interpolációt a következő formula állítja elő:

$$H_m(x)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m_k-1} f_k^{(i)} l_{k,i}(x)\,.$$

Vegyük észre, a kapott előállítás egy újabb igazolását adja annak, hogy a nem-hiányos Hermite-interpoláció feladata egyértelműen megoldható.

### 14.4. Inverz interpoláció

Erről beszélünk, ha a függő és független változókat felcseréljük: Így $x=x(y)$ típusú polinomot kapunk. A technikát akkor alkalmazzuk, ha arra vagyunk kiváncsiak, hogy a függvény egy adott értéket mely helyen vesz fel, például, ha a függvény gyökét keressük. Ekkor a közelítő polinomba $y=0$ -t helyettesítve a gyök helyére kapunk egy közelítést.

### 14.5. Feladatok

1. Származtasssunk interpolációs formulát, amikor a tartópontok: $(x_0,f_0)$, $(x_1,f_1,f_1',f_1'')$.
2. A szinusz függvény egyenletes tabellázásakor a deriváltja is ismert a koszinusz függvény-nyel való ismert összefüggés miatt, így Hermite-Fejér interpolációt alkalmazhatunk két alappont között. Milyen sűrűn kell egyenletesen tabellázni a függvényt $[0,\pi/2]$ -ben, ha mindenütt $10^{-4}$ hibával szeretnénk a függvény értékeit megkapni?
3. Írjuk fel az Hermite-Fejér interpolációhoz tartozó hibaformulát, ha az interpoláció a Csebisev alappontokon történik.
4. Mutassuk meg, hogy Hermite-Fejér interpolációnál $h_k(x)=\left(l_k(x)\right)^2$, $p_{k,0}(x)=1-2l_k'(x_k)(x-x_k)$ és $p_{k,1}(x)=x-x_k$.
5. Melyek az Hermite-interpolációs bázispolinomok, ha a tartópontok: $(x_0,f_0,f_0')$, és $(x_1,f_1,f_1')$?
6. Készítsük el az Hermite-interpoláció bázispolinomjait, ha a tartópontok: $(x_0,f_0,f_0'')$, és $(x_1,f_1,f_1'')$. Bár hiányos a deriváltak megadása, a bázispolinomok mégis léteznek.
7. Egy függvényhez tartozó négy pont: $(1,-1)$, $(2,1)$, $(3,2)$, $(5,3)$. Inverz interpolációt választva határozzuk meg a gyök közelítését Neville-interpolációval!



# 13. Iterált interpoláció (Neville, Aitken, Newton)

### 13.1. A Neville- és Aitken-interpoláció.

A Lagrange-interpoláció hátránya, hogy újabb osztópontok felvételekor az alappolinomokat újra kell számolni. És van, amikor nem is az interpolációs polinom, hanem közvetlenül annak helyettesítési értéke kéne. Ilyenkor előnyös az iterált interpoláció.

Legyenek az interpoláció tartópontjai $\{(x_i,f_i=f(x_i)\}_{i=0}^{n}$, és jelöljük $p_{0,1,\ldots,k}(x)$ -szel azt a $k$ -adfokú polinomot, amelyre

$$p_{0,1,\ldots,k}(x_j)=f(x_j),\;\; j=0,1,\ldots,k, \tag{13.1}$$

azaz interpolációs polinom a megjelölt pontokra. Megmutatjuk, hogy e polinomok rekurzióval is felépíthetők. Tekintsük a következő determinánst:

$$p_{0,1,\ldots,k,k+1}(x)=\frac{1}{x_{k+1}-x_0}\begin{vmatrix} x-x_0 & p_{0,1,\ldots,k}(x)\\ x-x_{k+1} & p_{1,\ldots,k+1}(x)\end{vmatrix} \tag{13.2}$$

Közvetlen ellenőrzéssel kapjuk, hogy az új polinom jól interpolál az $x=x_0$ és $x=x_{k+1}$ pontokban. A közbülső pontokban pedig, ahol $0<j<k+1$,

$$p_{0,1,\ldots,k,k+1}(x_j)=\frac{1}{x_{k+1}-x_0}\begin{vmatrix} x_j-x_0 & p_{0,1,\ldots,k}(x_j)\\ x_j-x_{k+1} & p_{1,\ldots,k+1}(x_j)\end{vmatrix}=f(x_j)\frac{x_j-x_0-(x_j-x_{k+1})}{x_{k+1}-x_0}=f(x_j).$$

E rekurzió alapján a Neville-interpolációhoz a következő számtáblázatot készítjük:

| | $k=0$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x-x_0$ | $f_0=p_0(x)$ | | | |
| $x-x_1$ | $f_1=p_1(x)$ | $p_{01}(x)$ | | |
| $x-x_2$ | $f_2=p_2(x)$ | $p_{12}(x)$ | $p_{012}(x)$ | |
| $x-x_3$ | $f_3=p_3(x)$ | $p_{23}(x)$ | $p_{123}(x)$ | $p_{0123}(x)$ |

Vegyük észre, hogy most egy újabb pont $(x_4,f_4)$ hozzávételével elegendő az $x_3$ -ig kész táblázathoz egy újabb sort kiszámolni. Ha az $x-x_j$ -k számok, akkor a bal oszlop számainál a felsőből vonjuk ki az alsót a rekurziós formula nevezőjének előállításához, pl. $x-x_0-(x-x_j)$. Például határozzuk meg a táblázat értékeit $x=2$ -re, ha a tartópontok:

| $x_i$ | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|
| $f_i$ | 1 | 3 | 2 |

A számolás menete:

Például, ha $m_k = 2$, akkor a nulladik és az első derivált illeszkedik $x_k$-ban. Általában a feltételek száma:

$$\sum_{k=0}^{n} m_k = m+1, \tag{14.4}$$

tehát $m$-edfokú polinom lehetséges: $H_m(x) = \mathcal{P}_m$, és az illeszkedési feltételek:

$$H_m^{(i)}(x_k) = f^{(i)}(x_k), \quad i = 0,1,\ldots,m_k - 1; \quad k = 0,1,\ldots,n. \tag{14.5}$$

### 14.2.1 Tétel

Ha az alappontok különbözőek, a (14.5) illeszkedési feltételeknek eleget tevő $H_m(x)$ polinom létezik és egyértelmű.

*Bizonyítás.* Legyen a polinom $H_m(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$ alakú és írjuk fel az együtthatókat meghatározó lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^m \\ 0 & 1 & 2x_0 & \ldots & mx_0^{m-1} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f'(x_0) \\ \vdots \end{bmatrix},$$

ami most egy $(m+1)\times(m+1)$-es rendszer. Ennek van megoldása, ha a determinánsa $\det(A) \neq 0$. Indirekt módon tegyük fel, hogy mégis $\det(A) = 0$. Következik, hogy a homogén egyenletnek $(b = 0)$ van nemzérus megoldása, ami ekkor $m$-edfokú polinom. Vegyük észre, a zérus jobb oldal most azt jelenti, hogy $x_k$ $m_k$-szoros gyöke a polinomnak. De akkor ennek a polinomnak $m+1$ gyöke kéne, hogy legyen, ami ellentmondás. Ezért az egyenletrendszer mátrixa invertálható, és a megoldás egyértelmű. ■

*Megjegyzés.* Ha a deriváltak hiányosan vannak megadva, akkor a hiányos (idegen szóval: *lakunáris*) Hermite-interpoláció feladata nem mindig oldható meg.

### 14.2.2 Hibatétel a nem-hiányos Hermite-interpolációra

Legyen $f(x) \in C^{m+1}[a,b]$, $x \in [a,b]$, ekkor létezik $\xi_x \in [a,b]$, amelyre

$$f(x) - H_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi_x)}{(m+1)!}\omega_m(x), \tag{14.6}$$

ahol most $\omega_m(x) = (x-x_0)^{m_0}(x-x_1)^{m_1}\ldots(x-x_n)^{m_n}$.

*Bizonyítás.* Az 11.3.1 Tételhez hasonlóan tesszük. Ha $x = x_k$, $k = 0,1,\ldots,n$, akkor az állítás igaz, így a továbbiakban legyen $x \neq x_k$ minden $k$-ra. Vezessük be most is a

$$g_x(z) = f(z) - H_m(z) - \frac{\omega_m(z)}{\omega_m(x)}(f(x) - H_m(x)), \quad z \in [a,b] \tag{14.7}$$

függvényt, amelynek $z = x$-szel együtt $m+2$ gyöke van. A tétel állításához a Rolle-tétel $(m+1)$-szeri alkalmazása után jutunk. ■



Az alábbi táblázatban az oszlopok feletti szám az osztott differencia rendjét mutatja.

| | | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1/2 | 2 | | | |
| 1 | 1 | $\frac{1-2}{1-1/2} = -2$ | | |
| 2 | 1/2 | $\frac{1/2-1}{2-1} = -\frac{1}{2}$ | $\frac{-1/2-(-2)}{2-1/2} = 1$ | |
| 3 | 1/3 | $\frac{1/3-1/2}{3-2} = -\frac{1}{6}$ | $\frac{-1/6-(-1/2)}{3-1} = \frac{1}{6}$ | $\frac{1/6-1}{3-1/2} = \frac{-1}{3}$ |

### 13.2.1 Lemma

Fennáll az összefüggés:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\omega_k'(x_j)}, \tag{13.6}$$

itt $\omega_k(x)$ az (11.5)-ben megismert szorzatfüggvény.

Bizonyítás. Teljes indukcióval végezhető. $k = 1$-re az állítás igaz. A $k$-ról $k+1$-re való áttérésnél az

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{k+1}] = \frac{f[x_1, \ldots, x_{k+1}] - f[x_0, \ldots, x_k]}{x_{k+1} - x_0}$$

összefüggés alapján az 1-gyel kisebb rendű osztott differenciákba írjuk be a tétel állítását, majd rendezéssel nyerjük az eredményt. ■

Látható, az osztott differencia az alappontok szimmetrikus függvénye. Értéke független attól, hogy az alappontok milyen sorrendben vannak megadva.

## *13.3. A rekurzív Newton-interpoláció*

Jelölje $N_n(x)$ az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ alappontokra épített interpolációs polinomot (Newton- polinom). Ekkor ezen polinomok a következő rekurzióval számíthatók:

$$N_n(x) = N_{n-1}(x) + b_n \omega_{n-1}(x), \tag{13.7}$$

ahol a $b_n$ együttható abból a feltételből határozható meg, hogy $N_n(x)$ interpolál az $x_n$ pontban:

$$b_n = \frac{f_n - N_{n-1}(x_n)}{\omega_{n-1}(x_n)}.$$

Azonban a $b_n$-ek számítására van egy ennél sokkal egyszerűbb módszer.

### 13.3.1 Tétel

$$b_n = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]. \tag{13.8}$$